

Über niederdimensionale CW - Komplexe in nichtkompakten Mannigfaltigkeiten

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg - August - Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Gudrun Kalmbach
aus Hallwangen

Göttingen 1966



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Über niederdimensionale CW-Komplexe
in nichtkompakten Mannigfaltigkeiten.

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von Gudrun Kalmbach
aus Hallwangen

Göttingen 1966



D 7

Referent: Professor Dr. H. Grauert

Korreferent: Professor Dr. R. Remmert

Tag der mündlichen Prüfung: 10. November 1966

Einleitung.

Sei M eine zusammenhängende, nichtkompakte C^∞ -Mannigfaltigkeit der Dimension n . F_M bezeichne die Menge der streng nicht entarteten Funktionen (s.S. 6) auf M , für die $\{p \in M | f(p) \leq c\} =: M^c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ kompakt ist.

In dieser Arbeit konstruieren wir mit Hilfe eines $f \in F_M$ Teilmengen $K^c \subset M$, $c \in \mathbb{R}$, mit folgenden Eigenschaften:

1) $K^c \subset K^d$ für $c \leq d$. 2) $K^c \subset M^c$. 3) K^c ist Deformationsretrakt von M^c . 4) In wichtigen Fällen ist $\dim K^c < n$.

(1)

Die Konstruktion der K^c benutzt Methoden der Morsetheorie:

Man kann in passender Weise jedem kritischen Punkt p von f eine λ -dimensionale Zelle $E_p \subset M$ zuordnen ($\lambda = \text{Index von } f \text{ in } p$). Sei P die Menge der kritischen Punkte von f auf M . K^c sei die Vereinigung der Zellen E_p mit $p \in P$ und $E_p \subset M^c$, also $K^c = \bigcup_{\substack{E_p \subset M^c \\ p \in P}} E_p$.

Sei $K := \bigcup_{p \in P} E_p$. Hat f auf M nur endlich viele kritische Punkte, so ist K Deformationsretrakt von M . Wenn f auf M unendlich viele kritische Punkte hat, kann es vorkommen, daß K nicht Deformationsretrakt von M ist (s.S. 9).

Bei geeigneter Wahl der Zellen E_p ist es möglich, eine Strukturaussage über K zu machen:

Seien $p, p' \in P$ und $p' \neq p$. Dann ist entweder $E_{p'} \cap \overline{E_p} = \emptyset$ oder es ist $E_{p'} \subset \overline{E_p}$. (Lemma 1).

In §4 und §5 setzen wir das Studium der Teilmengen K von M fort. Morse bewies, daß es für jede kompakte

Mannigfaltigkeit M streng nicht entartete Funktionen auf M gibt, die genau einen kritischen Punkt vom Index 0 und genau einen vom Index n haben. ([13]).

Wir zeigen eine analoge Aussage für nichtkompakte Mannigfaltigkeiten: Auf jeder nichtkompakten Mannigfaltigkeit gibt es Funktionen $f \in F_M$, die genau einen kritischen Punkt p_1 vom Index 0 haben und keinen kritischen Punkt vom Index n . (2)

Genauer gesagt gilt: Sei f eine beliebige Funktion aus F_M . Es gibt eine Teilmenge Q von P , so daß Q die Menge der kritischen Punkte einer Funktion $f' \in F_M$ ist, für die (2) gilt und für die der Index von f' in $q \in Q$ gleich dem Index von f in q ist. (Satz 5). Man kann sagen, daß die kritischen Punkte p einer beliebigen Funktion $f \in F_M$ mit $f(p) > \min_{q \in M} f(q)$ und mit dem Index $\lambda = 0$ oder n in gewissem Sinne überflüssig sind. Morse stellte die Frage ([13]), ob man auch von weiteren kritischen Punkten p von f auf M zeigen kann, daß sie überflüssig sind. In dieser Richtung geht das folgende Ergebnis: Wir zeigen, daß nichtgeschlossene (im Sinne von Def. 5, S. 45) Mengen $\overline{E}_p$ überflüssig sind.

In § 6 geben wir Anwendungen der Sätze. Wählt man $f \in F_M$ geeignet, so wird $\dim K \leq n-1$. Für Steinsche Mannigfaltigkeiten ist $\dim K \leq m$, wobei m die komplexe Dimension von M ist. ([11], S. 39).

Auf jeder glattberandeten Mannigfaltigkeit (Def. 7, S. 58) kann man eine Funktion $f \in F_M$ mit nur endlich vielen

kritischen Punkten konstruieren. Zu den glattberandeten Mannigfaltigkeiten gehören die streng pseudokonvexen Steinschen Mannigfaltigkeiten mit C^2 -Rand.

Für streng pseudokonvexe Steinsche Mannigfaltigkeiten M mit C^2 -Rand gilt außerdem, daß $\dim K \leq m$ ist.

(m = komplexe Dimension von M .)

Danach zeigen wir ein Ergebnis für die ganzzahligen singulären Homologiegruppen $H_m(M)$ und für die Homotopiegruppen $\pi_m(M)$ von M . Wir geben in jeder Klasse $A(B)$ von $H_m(M)$ ($\pi_m(M)$) ein Element $\mathfrak{G}' \in A$ ($\varphi' \in B$) an, so daß die Spur C (S. 63) von $\mathfrak{G}'$ (φ') im m -dimensionalen Gerüst von K liegt; C ist die Vereinigung endlich vieler der E_p mit $p \in P$.

Bezeichnungen

[...] Zahlen in eckigen Klammern sind Literaturhinweise.

Es seien

M eine zusammenhängende, nichtkompakte C^∞ -Mannigfaltigkeit.

$n = \dim M$ die Dimension von M .

$\text{dist}(A, B)$ für Teilmengen $A, B \subset M$: der Abstand von A und B in der durch die Riemannsche Metrik induzierten Metrik auf M . ([10], S. 96)

$\bar{A}, \overset{\circ}{A}, \delta A$ für eine Teilmenge $A \subset M$ beziehentlich: die abgeschlossene Hülle, der offene Kern, die Menge $\bar{A} - \overset{\circ}{A}$.

$A \subset\subset B$ für Teilmengen $A, B \subset M$: $\bar{A} \subset \overset{\circ}{B}$ und A kompakt in M .

ϕ die leere Menge.

C^∞ unendlich oft differenzierbar.

differenzierbar: C^∞ -differenzierbar.

D_M die Menge der C^∞ -Funktionen auf M .

$f|_A$ für $f \in D_M$ und $A \subset M$: die Beschränkung von f auf A .

M^c die Menge $\{p \in M \mid f(p) \leq c\}$ für $c \in \mathbb{R}$, $f \in D_M$.

Niveaufläche von $f \in D_M$: die Menge δM^c , $c \in \mathbb{R}$.

$M^{a,b}$ die Menge $M^b - \overset{\circ}{M}^a$ für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f \in D_M$.

F_M die Menge der streng nicht entarteten Funktionen auf M , für die $M^c \subset\subset M$, $c \in \mathbb{R}$, ist.

f eine Funktion aus F_M .

$P = \{p_1, p_2, \dots\}$ die Menge der kritischen Punkte von f auf M mit $f(p_1) < f(p_2) < \dots$.

λ_1 der Index von f in $p_1 \in P$.

φ der durch f definierte maximale Fluß auf $M - P$.

$\varphi(p)$ die Stromlinie von φ durch $p \in M - P$. Für $p \in P$ setzen wir $\varphi(p) = \{p\}$.

Umgebung von $A \subset M$: eine in M offene Menge, die A enthält.

$x = (x_1, \dots, x_n)$, y, z : lokale Koordinaten in $U \subset M$.

$x \leftrightarrow p$ für $p \in U$: die in lokalen Koordinaten in U einander zugeordneten Punkte von $\mathbb{R}^n$ und U .

e_i die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = (x_1, \dots, x_{\lambda_i}, 0, \dots, 0),$
 $0 \leq \sum_{\ell=1}^{\lambda_i} x_\ell^2 \leq \varepsilon_i\}$ mit $\varepsilon_i > 0$.

I_i die Menge $\{x = (0, \dots, 0, x_{\lambda_i+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid$
 $0 \leq \sum_{\ell=\lambda_i+1}^n x_\ell^2 \leq \delta_i\}$; $\delta_i > 0$.

e_i und I_i können als Teilmengen einer Umgebung U von p_i aufgefaßt werden (s. auch 5.7)

E_i die Menge $\{p \in M \mid \varphi(p) \cap e_i \neq \emptyset\}$.

$RdE_i = \overline{E_i} - E_i$

$K := \bigcup_{i=1,2,\dots} E_i$

K^C die Vereinigung der Zellen E_i mit $p_i \in M^C$

M_p der Tangentialraum an M in $p \in M$.

X, X', X_k Vektorfelder auf M ; $k = 1, 2, \dots$.

(X_p, Y_p) oder $g^*(p)(X, Y)$ für $X_p, Y_p \in M_p$: das durch die Riemannsche Metrik bestimmte innere Produkt von X_p und Y_p .

Δg für $g \in D_M$: das Gradientenfeld von g auf M . Es ist durch die Identität $(X, \Delta g) = X(g)$ definiert (s. [11], [5, 12]).

$h_{\Delta g} := \Delta g(h)$ für $h, g \in D_M$.

S^m m -dimensionale Sphäre.

$g_{a,b,f}$ für $a, b \in \mathbb{R}$ und $f \in F_M$: die in Hilfssatz 1 konstruierte Funktion.

$[X]$ Äquivalenzklasse eines Vektorfeldes $X \in \mathfrak{f}$ (s. S. 22)

§1) Vorbemerkungen

Wir stellen in diesem Paragraphen einige der Definitionen und Aussagen zusammen, die wir im Folgenden benötigen.

Sei $f \in D_M$. Ein Punkt $p \in M$ heißt kritischer Punkt von f auf M , wenn $\Delta f(p) = 0$ ist. p heißt nicht entarteter kritischer Punkt, wenn in einer Umgebung U von p mit lokalen Koordinaten x gilt $\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (p) \right) \neq 0$. Eine Funktion $f \in D_M$ heißt streng nicht entartete Funktion, wenn sie auf M eine abzählbare Menge $P = \{p_1, p_2, \dots\}$ nicht entarteter kritischer Punkte hat, so daß $f(p_1) < f(p_2) < \dots$ ist und $\Delta f(q) \neq 0$ für $q \in M - P$ gilt. Sei $p \in P$. Die Anzahl λ der negativen Eigenwerte von $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (p) \right)$ nennen wir den Index von f in p . Eine Riemannsche Metrik kann auf M so gewählt werden, daß in einer Umgebung U jedes kritischen Punktes der vorgegebenen Funktion $f \in F_M$ und zu vorgegebenen lokalen Koordinaten x in U das innere Produkt für $X(x) = (X_1(x), \dots, X_n(x)) \in M_x$ und $Y(x) = (Y_1(x), \dots, Y_n(x)) \in M_x$ gegeben ist durch $(X(x), Y(x)) = \sum_{i=1}^n X_i(x) Y_i(x)$ ([13]). Sei X ein Vektorfeld auf M und $N = \{p \in M \mid X(p) \neq 0\}$. Zu $p \in N$ existiert eine Umgebung U von p in M und eine differenzierbare Abbildung

$$\left\{ \begin{array}{l} \{t \mid 0 \leq |t| < \varepsilon\} \times U \longrightarrow M \\ (t, p) \longrightarrow \chi(t, p) \end{array} \right\}, \quad \varepsilon > 0, \text{ so daß}$$

$\chi(0, p) = p$ und $\frac{d\chi(t, p)}{dt} = X(\chi(t, p))$ ist. $\{\chi(t, p) \mid |t| < \varepsilon\}$ nennt man Stromlinie von χ . χ heißt ein lokaler Fluß von X ([10], S. 164-171). Sei χ ein von X auf N erzeugter lokaler Fluß. Der Fortsetzungssatz für Stromlinien ([10], S. 168) liefert zu jedem $p \in N$ eine maximale Stromlinie $\chi(p)$ durch p , die auf einem Intervall I aus $\mathbb{R}$ definiert ist,

$\chi(p) = \{\chi(t,p) \in N \mid t \in I \subset \mathbb{R}\}$. Die dadurch auf der eindeutig durch X bestimmten offenen Teilmenge $W \subset \mathbb{R} \times N$ induzierte Abbildung χ nennen wir maximalen Fluß von X .

Die Stromlinien von χ seien die maximalen Stromlinien $\chi(p)$ auf N . Die Kurven $\chi(p)$ sind eindeutig durch X bestimmt. Wir reden deswegen von dem maximalen Fluß χ von X . Ohne Angabe des zugehörigen Vektorfeldes X sprechen wir auch von maximalen Flüssen χ . Zu einem maximalen Fluß χ gibt es mehrere Vektorfelder auf N , welche die Stromlinien $\chi(p)$ in der oben beschriebenen Weise definieren.

Wir betrachten auf M nun das Vektorfeld $X = \Delta f$. Ohne Einschränkung ([10], S. 170) ist $\varphi(p)$ auf $\mathbb{R}$ definiert für jedes $p \in M - P$. Die Stromlinien $\varphi(p)$ haben in M als Randpunkte die Punkte von P . In einer Umgebung U eines kritischen

Punktes p von f ist bei geeigneter Wahl der Koordinaten x in U die Funktion f gegeben durch $f(x) = f(p) - \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^n x_i^2$. (1)

Dabei ist λ der Index von f in p . Die lokalen Koordinaten x in einer Umgebung U eines kritischen Punktes $p_k = p$ von f seien im folgenden, wenn nichts anderes bemerkt wird, immer nach (1) gewählt. Die Zellen e_k, I_k, E_k sind dann wohldefinierte Teilmengen von M . Das Differentialgleichungssystem für φ lautet in U

$$\begin{aligned} \frac{dx_i(t)}{dt} &= -2x_i & \text{für } i = 1, \dots, \lambda \\ \frac{dx_i(t)}{dt} &= 2x_i & \text{für } i = \lambda+1, \dots, n \end{aligned} \quad (2)$$

p ist stationärer Punkt für das Differentialgleichungssystem (2) ([9], S. 42). Für $x \neq 0$ ist die durch x gehende Stromlinie von φ lokal gegeben durch $\varphi(t, x) = (e^{-2t}x_1, \dots, e^{-2t}x_\lambda, e^{2t}x_{\lambda+1}, \dots, e^{2t}x_n)$. Die Stromlinien von $X = \Delta f$ nennen wir auch Stromlinien von f . Ein Fluß

sei im folgenden immer ein maximaler Fluß und Stromlinien immer maximale Stromlinien.

Zur Definition des CW-Komplexes siehe ([15], S.223).

Zur Definition einer streng pseudokonvexen Steinschen Mannigfaltigkeit mit C^2 -Rand siehe ([7], S.262).

Eine Kompaktifizierung M^* einer Mannigfaltigkeit M ist ein kompakter topologischer Raum M^* mit 1) $M \subset M^*$

2) M liegt in M^* dicht 3) die durch die Topologie von M^* auf M induzierte Topologie fällt mit der ursprünglich auf M gegebenen Topologie zusammen ([4], S.85). Wir sagen kurz, M sei kompaktifiziert.

Die Randpunkte der Stromlinien von f in M sind die kritischen Punkte von f . Für $p \in M - P$ hat jede Stromlinie $\varphi(p)$ von f mindestens einen kritischen Punkt p_i als Randpunkt, da $\varphi(p)$ eine maximale Stromlinie von f ist und $\varphi(p) \cap M^{f(p)} \neq \emptyset$ in der kompakten Teilmenge $M^{f(p)}$ liegt. (s.Def. von F_M). Ist $p \in E_k$ für ein k und $p \neq p_k$, so folgt mit der eben gemachten Bemerkung, daß es einen kritischen Punkt p_i mit $i < k$ gibt, so daß $p_i \in \overline{\varphi(p) \cap M^{f(p)}}$ ist. - Zur Motivierung der Problemstellungen dieser Arbeit geben wir einige bekannte Sätze aus der Morsetheorie an. Es gilt

I. Sind $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f \in F_M$ und liegt in $M^{a,b}$ kein kritischer Punkt von f , so ist M^b diffeomorph zu M^a .

Ist $p_i \in P$ und sind a, b mit $a < f(p_i) < b$ genügend nahe bei $f(p_i)$ liegende Werte, so gilt

II. M^b hat denselben Homotopietyp wie $M^a \vee e_i$.

III. M ist vom Homotopietyp eines CW-Komplexes K , dessen Struktur von f abhängt. Und zwar in der folgenden Weise:

Es besteht eine eindeutige Zuordnung zwischen den Zellen E von K und den kritischen Punkten p von f , so daß der Index λ von f in p gleichzeitig die Dimension der Zelle E ist ([11]).

Wir stellen uns die Frage: Kann der CW-Komplex K nach III. als Teilmenge von M gewählt werden, so daß man für gewisse Mannigfaltigkeiten M eine Deformationsretraktion von M auf K angeben kann?

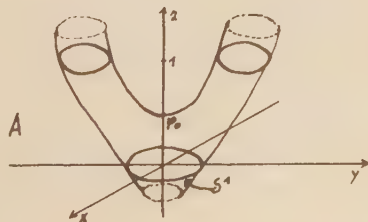
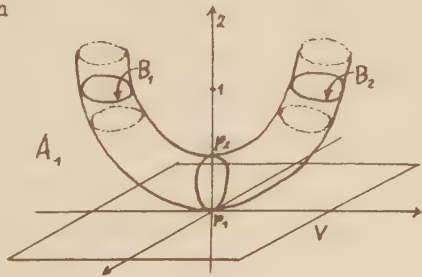
Daß man einschränkende Voraussetzungen an M oder f machen muß, zeigt das folgende Beispiel. Wir definieren eine 2-dimensionale, orientierbare Mannigfaltigkeit M , auf der eine Funktion $f \in F_M$ mit unendlich vielen kritischen Punkten $P = \{p_1, p_2, \dots\}$ gegeben ist und die so beschaffen ist, daß K (s.S. 5) nicht Deformationsretrakt von M ist. Zur Konstruktion von M :

Die folgenden Mannigfaltigkeiten $A, A_i, i = 1, 2, \dots$, seien kompakte Mannigfaltigkeiten

mit Rand. Sei A_1 ein 2-dimensionaler Zylinder.

Auf A_1 sei die Funktion f_1 definiert als Höhe über der Tangentialebene V an M in p_1 . Es sei

$f_1|_{\partial A_1} \equiv 1$. Sei A ein 2-dimensionaler Zylinder, aus dessen Inneren eine 2-Zelle herausgeschnitten ist. A sei so in $\mathbb{R}^3$ eingebettet, daß der Rand der

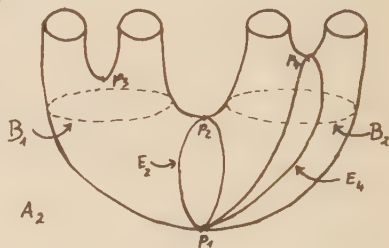


herausgeschnittenen 2-Zelle die Sphäre S^1 in der (x,y) -Ebene ist und A ganz im Halbraum $\{(x,y,z) | z \geq 0\}$ liegt. Auf A sei eine Funktion g definiert als die Höhe über der (x,y) -Ebene. Es sei $g|_{\partial A - S^1} \equiv 1$. g hat auf A genau einen kritischen Punkt, den Punkt p_0 .

Seien B_1, B_2 die Zusammenhangskomponenten von ∂A_1 . Es gibt Homeomorphismen $\varphi'_\nu : B_\nu \rightarrow S^1$, $\nu = 1, 2$. Sei C_2 die disjunkte Vereinigung von A_1 und zweier 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten N_1, N_2 , die homeomorph zu A sind. Seien $\varphi'_\nu : A \rightarrow N_\nu$ diese Homeomorphismen. Dann haben wir die Homeomorphismen $\varphi_\nu = \varphi'_\nu |_{S^1} \circ \varphi''_\nu : B_\nu \rightarrow \varphi'_\nu(S^1) \subset \partial N_\nu$.

In C_2 identifizieren wir jeden Punkt $p \in B_\nu$ mit $\varphi_\nu(p) \in \partial N_\nu$, $\nu = 1, 2$. Die so entstehende 2-dimensionale Mannigfaltigkeit nennen wir A_2 .

A_2 wird zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, wenn wir die Homeomorphismen φ_ν als Beschränkung folgender Abbildungen wählen.



Sei $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y,0) \in S^1, -\varepsilon < z < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Es gibt differenzierbare Mannigfaltigkeiten A'_1, A', N'_1 und N'_2 mit $A_1 \subset A'_1 \subset \mathbb{R}^3$, $A \subset A' \subset \mathbb{R}^3$, $N_\nu \subset N'_\nu$, $\nu=1,2$ mit folgenden Eigenschaften:

Zu jeder Zusammenhangskomponente des Randes von A_1 bzw. A bzw. N_ν gibt es in A'_1 bzw. A' bzw. N'_ν eine Umgebung, die diffeomorph zu D ist. (3). Es sei $N'_1 - N_\nu$ bzw. $A' - A$ (3) bzw. $A'_1 - A_1$ enthalten in der Vereinigung der nach (3) existierenden und zu D diffeomorphen Umgebungen

der Zusammenhangskomponenten von δN_ν bzw. δA bzw. δA_1 in N'_ν bzw. A' bzw. A'_1 .

$G_\nu(G'_\nu)$ seien die nach (3) existierenden Umgebungen von $B_\nu(\varphi_\nu(B_\nu))$ in $A'_1(N'_\nu)$. $\eta'_\nu: G_\nu \rightarrow D$ und $\eta'_\nu: D \rightarrow G'_\nu$ seien die nach (3) existierenden Diffeomorphismen. Sei $\eta_\nu = \eta'_\nu \circ \eta'_\nu$. In der disjunkten Vereinigung von A'_1, N'_1 und N'_2 identifizieren wir $p \in G_\nu$ mit $\eta_\nu(p)$. Dann liefern die differenzierbaren Strukturen auf A'_1, N'_1, N'_2 eine differenzierbare Struktur auf A'_2 . Damit trägt auch A_2 eine differenzierbare Struktur, wenn $\varphi_\nu = \eta_\nu|_{B_\nu}$ gewählt wird.

Auf A_2 haben wir eine Funktion f_2 , die definiert ist durch $f_2|_{A_1} \equiv f_1$ und $f_2|_{N_\nu} \equiv 1 + g \circ \varphi'_\nu{}^{-1}$, $\nu = 1, 2$. Ohne Einschränkung ist $f_2 \in D_{A_2}$. Es ist $f_2|_{\delta A_2} \equiv 2$. f_2 hat die kritischen Punkte p_1, p_2 und $p_{\nu+2} = \varphi'_\nu(p_0)$, $\nu = 1, 2$ mit den Indizes $\lambda_k = 1$ für $k \geq 2$.

Seien die 2-dimensionalen, orientierbaren, differenzierbaren Mannigfaltigkeiten A_j und Funktionen $f_j \in D_{A_j}$ mit $j \leq i-1$ schon konstruiert, $i-1 \geq 2$. Es sei $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_{i-1}$ und $f_k|_{A_j} \equiv f_j$ für $k \geq j$. $D_1, \dots, D_r$ (mit $r = 2^{i-1}$) seien die Zusammenhangskomponenten von δA_{i-1} . Es gebe Homeomorphismen $\psi''_\nu: D_\nu \rightarrow S^1$, $\nu = 1, \dots, r$ und für f_{i-1} gelte $f_{i-1}|_{\delta A_{i-1}} \equiv i-1$. f_{i-1} habe die kritischen Punkte $p_1, \dots, p_r$ mit den Indizes $\lambda_k = 1$ für $k \geq 2$.

Dann sei A_i folgendermaßen definiert. Sei C_i die disjunkte Vereinigung von A_{i-1} und $r = 2^{i-1}$; 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten $M_1, \dots, M_r$, die homeomorph zu A sind. Seien $\psi'_\nu: A \rightarrow M_\nu$ diese Homeomorphismen, $\nu = 1, \dots, r$. Dann haben wir die Homeomorphismen

$$\eta_\nu = \eta''_\nu|_{S^1} \circ \psi''_\nu: D_\nu \rightarrow \eta''_\nu(S^1) \subset \delta M_\nu.$$

In C_1 identifizieren wir jeden Punkt $p \in D_v$ mit $\psi_v(p) \in \delta M_v$, $v = 1, \dots, r$. Die so entstehende Mannigfaltigkeit nennen wir A_1 . Man kann die Homeomorphismen ψ_v so wählen, daß A_1 eine differenzierbare Struktur trägt. Das macht man auf ähnliche Weise wie die Wahl der φ_v bei der Konstruktion von A_2 . Die Funktion f_1 auf A_1 sei definiert durch $f_1|_{A_{i-1}} \equiv f_{i-1}$, $f_1|_{M_v} \equiv i-1 + g \circ \psi_v^{-1}$, $v = 1, \dots, r$. Ohne Einschränkung ist $f_1 \in D_{A_1}$. Es ist $f_1|_{\delta A_1} \equiv i$ und f_1 hat die kritischen Punkte $p_1, \dots, p_r$, $p_{r+1} = \psi'_r(p_0), \dots, p_{2r} = \psi'_r(p_0)$ mit den Indizes $\lambda_k = 1$ für $k \geq 2$. Dann gilt (4) mit i anstelle von $i-1$.

Wir können somit definieren $M = A_1 \cup \bigcup_{i=2,3,\dots} A_i - A_{i-1}$ und für $p \in M$: $f'(p) = f_i(p)$ falls $p \in A_i$ ist. M kann auf natürliche Weise zu einer orientierbaren, zusammenhängenden C^∞ -Mannigfaltigkeit gemacht werden. Es ist $f' \in D_M$ (ohne Einschränkung). Da die Menge der streng nicht entarteten Funktionen in D_M dicht liegt, erhalten wir ([13] S.353) bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $f \in F_M$ mit $|f(p) - f'(p)| < \varepsilon$ für alle $p \in M$, so daß f auf M genau die Punkte $P = \{p_1, p_2, \dots\}$ als kritische Punkte mit den Indizes $\lambda_k = 1$ für $k \geq 2$ hat. Für $k \geq 2$ ist $\overline{E_k}$ eine 1-dimensionale Sphäre, welche die Punkte p_k und p_1 enthält. K ist nicht abgeschlossen in M . Sei U_1 eine Umgebung von p_1 in M . Ohne Einschränkung ist δU_1 homeomorph zu S^1 . $\chi : \delta U_1 \rightarrow S^1$ sei ein Homeomorphismus. Der Homeomorphismus χ kann so gewählt werden, daß $\chi(E_2 \cap \delta U_1) = \{(1,0), (-1,0)\}$ ist. Die Punkte von $\chi(E_j \cap \delta U_1)$ in S^1 für $2 \leq j < i$ seien genau die Randpunkte der Kurvenstücke $I_1, \dots, I_s$ aus S^1 mit $\dot{I}_v \cap \dot{I}_\mu = \emptyset$ für $v \neq \mu$ und

$\bigcup_{i=1}^3 I_i = S^1$. Durch die Punkte aus $\chi(E_i \cap \delta U_1)$ wird entweder eines der Intervalle I_i in drei Teile zerlegt oder zwei verschiedene Intervalle I_i und I_j werden halbiert. Jedes I_i wird durch einen Punkt aus $\chi(E_k \cap \delta U_1)$ für ein k mit $i \leq k \leq i+s$ zerlegt. Daraus folgt, daß die Menge G der Punkte $\chi(E_i \cap \delta U_1)$, $i=2,3,\dots$ in S^1 dicht liegen, d.h. daß $\bar{G} = S^1$ ist. Es ist $\bar{K} = M$, da wegen der vorher gemachten Bemerkungen jeder Punkt von M Häufungspunkt von Punkten aus K ist. Man kann also keinen Deformationsretrakt d von M auf K angeben, da $d|_K = 1$ wäre und wegen $\bar{K} = M$ und der Stetigkeit von d gilt $d \equiv 1$ auf M .

K ist im allgemeinen nicht abgeschlossen, wenn f auf M unendlich viele kritische Punkte hat.

Die Ergebnisse, die wir erhalten, betreffen auch kompakte Mannigfaltigkeiten. Sei N eine n -dimensionale, kompakte, zusammenhängende C^∞ -Mannigfaltigkeit und f eine streng nicht entartete Funktion auf N . f hat auf N einen kritischen Punkt vom Index n , nämlich den Punkt p_r mit $f(p_r) = \max_{p \in M} f(p)$. Dann ist $M = N - \{p_r\}$ eine n -dimensionale, nichtkompakte, zusammenhängende C^∞ -Mannigfaltigkeit. Wir wissen, daß es auf M eine Funktion, nämlich $f|_M$, gibt, die auf M nur endlich viele kritische Punkte hat. Eine leicht durchzuführende Abänderung von f ergibt eine Funktion f' auf M , die außerhalb einer Umgebung U von p_r in N mit f übereinstimmt, die in U keine kritischen Punkte hat und für die $\lim_{i=1,2,\dots} f'(q_i) = \infty$ ist für jede Folge $q_i \in U$, die gegen p_r konvergiert. $f' \in F_M$ hat auf M nur endlich viele kritische Punkte.

§2) Schwache Deformationsretrakte von Mannigfaltigkeiten

In diesem Paragraphen ist unser Hauptziel der Beweis von Theorem 1. Wir zeigen, daß für jede Funktion $f \in F_M$ die Teilmenge K (s.S. 5) schwacher Deformationsretrakt von M ist (S. 19).

In Hilfssatz 1 und 2 konstruieren wir in Teilmengen von M neue Funktionen. Diese Funktionen benötigen wir als Hilfsfunktionen in den Beweisen zu den folgenden Sätzen und zu Theorem 1. Hilfssatz 3 gibt eine Aussage über K .

Definition 1: Seien $A \subset M$, $B \subset M$ mit $A, B \neq \emptyset$ abgeschlossene Mengen, $A \cap B = \emptyset$. Sei $g \in D_M$. g heißt Trennungsfunktion von A und B in M , wenn $g(p) = 0$ für $p \in A$, $g(p) = 1$ für $p \in B$, $0 \leq g(p) \leq 1$ in M und $\Delta g(p) \neq 0$ für alle $p \in M$ mit $0 < g(p) < 1$ ist.

Hilfssatz 1: Sei $U \subset M$ offen, $h \in D_U$. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $U - \bar{U}^b \neq \emptyset$, $U^a \neq \emptyset$. In $U^{a,b}$ sei $\Delta h(p) \neq 0$. Dann gibt es eine Trennungsfunktion $g(p) = g_{a,b,h}(p)$ von $U - \bar{U}^b$ und U^a in U , so daß $\Delta g(p) \neq 0$ ist in $\bar{U}^{a,b}$, und so daß die Niveauflächen von g mit denen von h in $U^{a,b}$ übereinstimmen.

Beweis: Sei in $a \leq y \leq b$ die Funktion $g'(y) := \frac{\int_a^b e^{-\frac{1}{t-a} + \frac{1}{t-b}} dt}{\int_a^b e^{-\frac{1}{t-a} + \frac{1}{t-b}} dt}$;

für $y \leq a$ sei $g'(y) = 1$ und es sei $g'(y) = 0$ für $y \geq b$. $g'(y)$ ist eine Trennungsfunktion von $y \geq b$ und $y \leq a$ in $\mathbb{R}$ ([14], S. 25). Wir definieren $g(p) = g'(h(p))$. Es ist $g(p) = 0$ für $h(p) \geq b$ und $g(p) = 1$ für $h(p) \leq a$. Ferner ist $0 \leq g(p) \leq 1$ auf U . Wegen $\Delta h(p) \neq 0$ und $\frac{dg'(y)}{dy} \neq 0$ ist $\Delta g(p) \neq 0$ in $\bar{U}^{a,b}$. Da $g'(y_1) \neq g'(y_2)$ für $y_1 \neq y_2$ und $a \leq y_1, y_2 \leq b$ ist, gilt auch die letzte Aussage des Hilfssatzes.

Hilfssatz 2: Sei $h \in D_M$ und $G := \{p \in M \mid h(p) = d\}$, $d \in \mathbb{R}$. Sei $\Delta h(p) \neq 0$ für $p \in G$ und sei $g' \in D_G$. Sei χ der Fluß von Δh und $N := \{p \in M \mid \chi(p) \cap G \neq \emptyset\}$. Sei $g(p) := g'(\chi_t(p))$ für $p \in N$ und $\chi_t(p) = \chi(p) \cap G$. Dann ist $g \in D_N$. Ist $\Delta g'(p) \neq 0$ in G , so ist auch $\Delta g(q) \neq 0$ in N .

Beweis: In einer Umgebung U_p eines Punktes $p \in G$ können wir die lokalen Koordinaten x so wählen, daß $x_1, \dots, x_{n-1}$ die Menge G aufspannen und $\frac{\delta}{\delta x_n}$ in Richtung Δh zeigt. $g(q)$ ist bezüglich dieses Koordinatensystems in U_p differenzierbar. Da bei geeigneter Parametrisierung ([11], S. 13) der Kurven von χ die Abbildung $\chi_t: U \rightarrow U_p$ für eine Umgebung U von $q = \chi_{-t}(p) \in N$ ein Diffeomorphismus ist, ist g in N differenzierbar. Wenn $\Delta g'(p) \neq 0$ auf G ist, gilt $\Delta g(q) \neq 0$ auf N .

Hilfssatz 3: Es ist $\overline{E_1} \subset K$.

Beweis: Es sei q_k eine Folge von Punkten aus E_1 , die gegen $p \in \text{Rd } E_1$ konvergiert. Wir haben zu zeigen, daß $p \in K$ ist. Entweder ist $p = p_k$ ein kritischer Punkt. Nach Definition von K ist dann $p \in K$. Oder es ist $p \neq p_k$ für alle k . In einer Stromlinie aus E_1 können im letzten Fall nur endlich viele q_k liegen, da die Stromlinien von f als Randpunkte nur kritische Punkte haben. Wir wählen aus q_k eine Teilfolge $q_1, q_2, \dots$ aus, so daß für die Stromlinien $\varphi(q_i)$ gilt $\varphi(q_i) \cap \varphi(q_j) = \emptyset$, falls $i \neq j$ ist. In einer Umgebung des Punktes p streben diese Stromlinien gegen die Stromlinie $\varphi(p)$ ([12], S. 207). In e_1 streben diese Stromlinien (= Radien der λ_1 -dimensionalen Kugel) gegen eine Stromlinie $g \in e_1$. Es ist $\varphi(p) \cap E_1 = \emptyset$, da sonst

$p \in \varphi(p) \subset E_i$ wäre. Also ist $\varphi(p) \cap g = \emptyset$. Das kann nur eintreten, wenn $\varphi(p)$ in $M - M^f(p)$ einen kritischen Punkt p_k als Randpunkt hat. Dann ist $p \in \varphi(p) \subset E_k \subset K$.

Wir wollen zeigen, daß für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Menge

$K^c := \bigcup_{i: p_i \in M^c \cap P} E_i$ Deformationsretrakt von M^c ist. (Aus dem Beweis zu HS 3 folgt, daß K^c abgeschlossen in M^c ist.) Dazu konstruieren wir zuerst in einer Umgebung V^c von K^c ein Vektorfeld X^c , so daß wir V^c längs der Stromlinien von X^c auf K^c deformieren können. Diese Aussage leiten wir in Satz 2 her. Wir wählen X^c so geeignet, daß wir ⁱⁿTheorem 1 mit Hilfe des Vektorfeldes X^c die Deformation von M^c auf K^c konstruieren können.

Sei $\lambda_i < n$. Wir geben eine Funktion $h_i(p)$ in einer Umgebung V'_i von E_i an mit $h_i \in D_{V'_i}$, so daß h_i in V'_i genau die Punkte von E_i zu kritischen Punkten hat. Die Stromlinien von h_i verlaufen so, daß wir V'_i längs der Stromlinien von h_i auf E_i deformieren können.

Sei U_i eine Umgebung von p_i und $\varepsilon_i > 0$ eine geeignete Konstante. Sei $V''_i := \{x \in U_i \mid h''_i(x) := \sum_{j=\lambda_i+1}^n x_j^2 < \varepsilon_i\}$ und $V'_i := \{p \in \varphi(x) \cap M^{f(x)} \mid x \in V''_i\}$. Man bemerke, daß $\bar{E}_i \not\subset V'_i$ ist, falls $\lambda_i > 0$ ist.

Satz 1: Es gibt eine Funktion $h_i \in D_{V'_i}$, so daß $\Delta h_i(p) = 0$ für $p \in E_i$ und $\Delta h_i(p) \neq 0$ für $p \in V'_i - E_i$ gilt.

Beweis: Sei $a' < b' < f(p_i)$, so daß $(\delta M^{a'}) \cap V'_i \subset U_i$ ist.

Sei $g(p) := g_{a', b', f}(p)$ für $p \in U_i$. Sei $x \in U_i$ und $x_0 = \varphi(x) \cap \delta M^{a'}$, dann ist $x_0 = (e^{-2t} x_1, \dots, e^{-2t} x_{\lambda_i}, e^{2t} x_{\lambda_i+1}, \dots, e^{2t} x_n)$ für ein $t \in \mathbb{R}$. Sei $h^x(p) = h''_i(\varphi_t(p))$ mit $\varphi_t(p) := \varphi(p) \cap (\delta M^{a'}) \cap V'_i$. Es ist $0 \leq h^x(x) =$

$= e^{4t} h_1'(x) \leq h_1'(x)$ für $t \leq 0$. Sei $h_1(p) = (1-g(p))h_1'(p) + g(p)h^*(p)$. Es ist $h_{1df}(x) = (1-g(x))h_1'(x) + (-h_1'(x) + h^*(x))g_{df}(x) > 0$ für $x \notin e_1$ und $x \in U_1 \cap M^{a',b'}$. Für $x \in e_1$ ist $\Delta h_1(x) = 0$. Die Eigenschaft $\Delta h_1(p) = 0$ bzw. $\Delta h_1(p) \neq 0$ bleibt bei Fortsetzung von h_1 längs der Stromlinien $\varphi(p)$ erhalten (HS 2). Das heißt, daß $\Delta h_1(p) \neq 0$ in $V_1' - E_1$ und $\Delta h_1(p) = 0$ in E_1 ist.

Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f(p_r) \leq c < f(p_{r+1})$. Sei V^c eine geeignet gewählte Umgebung von K^c .

Satz 2: Es gibt ein Vektorfeld X^c auf V^c , so daß $X^c(p) = 0$ für $p \in K^c$, $X^c(p) \neq 0$ für $p \in V^c - K^c$ und V^c längs der Stromlinien von X^c auf K^c deformierbar ist.

Beweis: Gibt es kritische Punkte $p_k \in M^c$ mit $\lambda_k = n$, so sei für $p \in A := \bigcup_{\substack{p_k \in M^c \\ \lambda_k = n}} \overline{E}_k$ das Vektorfeld $X^c(p) = 0$ gesetzt

und die folgende Konstruktion von X^c in $\bigcup_{\substack{1 \leq i \leq r \\ \lambda_i < n}} V_i' - A$

durchgeführt. Wegen der einfacheren Schreibweise nehmen wir an, daß $\lambda_1 < n$ ist für $i \leq r$ und berücksichtigen erst am Ende des Beweises, daß $\lambda_1 = n$ sein kann. (0)

Sei $V_1 := \bigcup_{i \in I} V_i'$, $1 \leq i \leq r$. Sei $0 < 2\varepsilon_1' < \varepsilon_1$, und $g_1(p) = g_{\varepsilon_1', 2\varepsilon_1', h_1}(p)$ für $p \in V_1'$ (s.S. 16). Sei $W_1' =$

$\{p \in V_1' \mid g_1(p) = 0\}$ und $W_1 := \{p \in V_1' \mid g_1(p) = 1\}$. Sei

$U_1' = \bigcup_{i \in I} W_i'$. Mit Hilfe der Funktionen h_i und g_i , $i=1, \dots, r$,

konstruieren wir Vektorfelder $X_r, \dots, X_1 = X^c$, so daß für

X_k , die Menge U_k' und $\bigcup_{i \in I} E_i = B^k$ anstelle von X^c , $\left. \vphantom{\bigcup_{i \in I} E_i} \right\} (1)$
 V^c und K^c die Aussage des Satzes gilt.

Wegen Satz 1 gibt es in V_r ein Vektorfeld $X_r = \Delta h_r$ mit

(1). Sei X_k mit $k \leq r$ schon konstruiert. Sei $U_k^* =$

$= \bigcup_{i \in I} (V_i' - W_i')$. Es gebe eine Trennungsfunktion $g_k' \in D_{V_k}$

von $V_k - U_k^*$ und U_k' in V_k . (Dabei sei $g_r' \equiv g_r$.) Wir zeigen, daß es eine Trennungsfunktion $g_{k-1}' \in D_{V_{k-1}}$ von $V_{k-1} - U_{k-1}^*$ und U_{k-1}' in V_{k-1} gibt. Sei $g_{k-1}'(p) = 1 - (1 - g_k'(p))(1 - g_{k-1}(p))$. (2). Es ist $g_{k-1}' \in D_{V_{k-1}}$ (2) und $g_{k-1}'(p) = 0$ falls $g_k'(p) = g_{k-1}(p) = 0$ ist, also in $V_{k-1} - U_{k-1}^*$ und es ist $g_{k-1}'(p) = 1$ falls $g_k'(p) = 1$ oder $g_{k-1}(p) = 1$ ist, also in U_{k-1}' . Sei $X_{k-1}'(p) = g_k'(p)X_k(p) + (1 - g_k'(p)) \Delta h_{k-1}(p)$ in $V_{k-1} - E_{k-1}$. Wir haben zu zeigen, daß $X_{k-1}'(p) \neq 0$ ist in $V_{k-1} - B^{k-1}$. (3)

Ohne Einschränkung ist $(X_k(p), \Delta f(p)) = 0$ für $p \in V_{k-1} \cap V_k$. Es ist $(X_{k-1}'(p), \Delta f(p)) = ((1 - g_k'(p)) \Delta h_{k-1}(p), \Delta f(p)) \geq 0$ und > 0 , falls $(1 - g_k'(p)) \neq 0$ und $h_{k-1} \Delta f(p) \neq 0$ ist.

$h_{k-1} \Delta f(p) > 0$ gilt, wenn $h_{k-1}''(p) > 0$ und $f(p) > a'$ (a' wie in Satz 1) ist. Also ist $X_{k-1}'(p) \neq 0$ für $p \in U_{k-1} - e_{k-1}$ mit $f(p) > a'$ und $(1 - g_k'(p)) \neq 0$. Damit gilt (3), (HS 2). Sei $g'(p) = 1 - g_0, \varepsilon_{k-1}'', h_{k-1}'(p)$ und

$0 < \varepsilon_{k-1}'' < \varepsilon_{k-1}'$. Sei $X_{k-1}(p) = g'(p)X_{k-1}'(p)$. Dann ist X_{k-1} ein differenzierbares Vektorfeld auf $V_{k-1}' \cap U_{k-1}'$, da $g' \cdot g_k' \in D_{V_{k-1}'}$ ist. Es ist $X_{k-1}(p) = 0$ für $p \in B^{k-1}$. Ferner ist $(X_{k-1}(p), \Delta f(p)) = (g'(p)X_{k-1}'(p), \Delta f(p)) > 0$ in

$U_{k-1} - (e_{k-1} \cup U_k')$ für $f(p) > a'$. Daraus folgt, daß $X_{k-1}(p) \neq 0$ in $V_{k-1}' - B^{k-1}$ ist. Sei $X_{k-1} \equiv X_k$ auf $V_k - V_{k-1}'$.

X_{k-1} ist ein Vektorfeld auf U_{k-1}' und erfüllt (1) mit $k-1$ anstelle von k . Man bemerke, daß ohne Einschränkung gilt

$(X_{k-1}, \Delta f) = 0$ in $V_{k-2}' \cap V_{k-1}$ falls $k - 2 \geq 1$ ist. - Wir setzen (s.(0)) $U_1' \cup A = V^C$. Wegen HS 3 ist V^C eine Umgebung von K^C in M^C . Sei $p \in V^C - K^C$, $\chi(p)$ die Stromlinie von X^C durch p . Es ist $\overline{\chi(p)} \cap K^C = \{p'\}$, ein Punkt. Sei d_p die Länge des Kurvenstückes von $\chi(p)$ zwischen p und p' .

Da $X^C(p) = g(p) \Delta h_k(p)$ auf $W_k - U_{k+1}^*$ ist mit $g \in D_{W_k}$

Ist d_p eine stetige Funktion von p . Für $p \in K^C$ sei $d_p = 0$ und $\chi(p) = \{p\}$. Ordnet man p den Punkt $q \in \chi(p)$ zu mit $d_q = (1-t)d_p$, $0 \leq t \leq 1$, so liefert diese Schar von Abbildungen eine Deformation von V^C auf K^C .

Definition 2: Sei $f \in F_M$. K heißt schwacher Deformationsretrakt von M , wenn für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Menge $K^C = \bigcup_{i: p_i \in H^c \cap M} E_i$ Deformationsretrakt von M^C ist.

Theorem 1: Sei $f \in F_M$. Dann ist $K = \bigcup_{i=1,2,\dots} E_i$ schwacher Deformationsretrakt von M .

Beweis: Mit Hilfe des Vektorfeldes X^C von Satz 2 und von Δf konstruieren wir ein Vektorfeld X^* auf M^C . Längs der durch X^* auf $M^C - K^C$ definierten Stromlinien können wir M^C auf K^C deformieren.

Sei $0 < 2a_1 < \varepsilon_1^1$ und ε_1^1 wie im Beweis zu Satz 2 und $\lambda_1 < n$. Sei $f_1(p) = g_{a_1, 2a_1, h_1}(p)$ für $p \in V_1^1 - A$, (s. Satz 2) und $g^+(p) := 1 - \prod_{j \in A} (1 - f_j(p))$. Für $p \in A$ setzen wir $g^+(p) = 1$, für $p \in M^C - V^C$ setzen wir $g^+(p) = 0$. Es ist $g^+ \in D_{M^C}$. (s. HS 3). Da $C = \{p \in M^C \mid g^+(p) = 1\}$ und $B = M^C - \{p \in M^C \mid g^+(p) > 0\}$ punktfremd und abgeschlossen in M^C sind, ist $1 - g^+$ eine Trennungsfunktion von C und B in M^C . X^C sei nach Satz 2 gewählt. Wir setzen $X^*(p) = g^+(p)X^C(p) + (1 - g^+(p))\Delta f(p)$. Da $(X^C(p), \Delta f(p)) \geq 0$ ist, ist $X^*(p) \neq 0$ falls $g^+(p) \neq 1$ ist.

Die Deformation von M^C auf K^C wird gegeben durch:
 $p \in K^C$ sei sich selbst zugeordnet. Sei $p \in M^C - K^C$ und

d_p die Länge der Stromlinie $\gamma(p)$ von X^* zwischen p und K^C . Wir ordnen p den Punkt $q \in \gamma(p)$ mit

$$d_q = (1-t)d_p, \quad 0 \leq t \leq 1, \text{ zu.}$$

Zusatz zu Theorem 1: Es gebe eine Funktion $f \in F_M$ mit nur endlich vielen kritischen Punkten $p_1, \dots, p_r$ auf M . Dann ist $K = \bigcup_{i=1}^r E_i$ Deformationsretrakt von M .

Beweis: Für $c > f(p_r)$ ist $K^C = K$ Deformationsretrakt von M^C . Da in $M - M^C$ keine kritischen Punkte von f liegen, schneidet $\varphi(p)$ für $p \in M - M^C$ den Rand von M^C transversal. Setzen wir $X^* \equiv \Delta f$ in $M - M^C$ (s. zu X^* Beweis zu Theorem 1)), so ist für den Fluß γ von X^* auf M die Länge d_p der Stromlinie $\gamma(p)$ zwischen p und K^C für $p \in M - K^C$ eine stetige Funktion von p . Wir schließen wie am Ende des Beweises zu Theorem 1 und erhalten die gewünschte Aussage.

{3) Strukturaussagen über K.

Für geeignete Vektorfelder X auf M (s. Definition 3, unten) kann man die Teilmenge K analog definieren wie für Δf . Wir werden für spezielle Vektorfelder eine Strukturaussage über das zugehörige K machen:

es ist $E_i \cap \overline{E_j} = E_i$ oder $= \emptyset$ (Lemma 1). Man (1)
kann sogar zu vorgegebenem Δf und $\varepsilon > 0$ ein X mit diesen Eigenschaften angeben, so daß $0 \leq (\Delta f(p), X(p)) \leq \varepsilon$ ist auf M .

Definition 3: $\mathcal{L}$ sei die Menge der Vektorfelder X auf M mit folgenden Eigenschaften:

1) die Punkte $p \in M$ mit $X(p) = 0$ liegen isoliert in M .
 P sei die Menge dieser Punkte.

2) Es gibt eine streng nicht entartete Funktion $f \in F_M$, die genau die Punkte aus P als kritische Punkte auf M hat. Zu jedem $p \in P$ gebe es Zahlen $\varepsilon = \varepsilon(p)$ und $\varepsilon' = \varepsilon'(p)$ mit $\varepsilon > \varepsilon' > 0$, so daß außerhalb der Scheiben $B_p = M^{f(p)-\varepsilon, f(p)-\varepsilon'}$ gilt $X \equiv \Delta f$ auf M und

$\bigcup_{p \in P} B_p \cap P = \emptyset$ ist.

3) Sei $q \in B_p$ und $\chi(q)$ die Stromlinie von X durch q , dann schneidet $\chi(q)$ die Teilmenge $\delta M^{f(p)-\varepsilon}$ von M genau in einem Punkt und $\delta M^{f(p)-\varepsilon'}$ in genau einem Punkt.

Wir numerieren die Punkte von P nach wachsenden Werten von $f : P = \{p_1, p_2, \dots\}$ und $f(p_1) < f(p_2) < \dots$.

Eigenschaft 3) benötigen wir, damit die Stromlinien χ einen für unsere Konstruktion vernünftigen Verlauf auf M

haben. Wir brauchen folgendes: sei $p \in M - P$, $\chi(p)$ die durch p gehende Stromlinie von X . $\chi(p)$ hat mindestens einen Randpunkt $p_i \in P$ auf M . Ist $f(p_i) > f(p)$, so hat $\chi(p)$ in M noch einen zweiten Randpunkt $p_k \in P$. Ist p_i der einzige Randpunkt von $\chi(p)$ in M , also $f(p_i) < f(p)$, so gibt es eine Folge $q_1, q_2, \dots$ von Punkten aus $\chi(p)$, die in M keinen Häufungspunkt hat. Wir wollen dafür sagen, die Kurve $\chi(p)$ geht zum Rand von M hin. Aus diesen Eigenschaften folgt, daß keine der Kurven $\chi(p)$ und $\overline{\chi(p)}$ geschlossen ist in M und kein $\chi(p)$ geht sowohl für $t \geq 0$ als auch für $t \leq 0$ zum Rand von M hin (- bei einer Parametrisierung $\chi_t(p)$ von $\chi(p)$ mit $\chi_0(p) = p$). Kurven mit solchen Eigenschaften könnten wir auch nicht gebrauchen, da sie die Konstruktion einer schwachen Deformation von M auf eine geeignet ausgewählte Teilmenge $K \subset M$ unmöglich machen würden, (s. Def. 2', §.33).

Wir führen in $\mathcal{L}$ eine Klasseneinteilung ein: es sei X_1 äquivalent X_2 , $X_1 \sim X_2$, wenn die nach Definition 3 zugehörigen Punktmengen P_1 und P_2 und die Funktionen f_1 und f_2 in $\bigcup_{p \in P_i} U_p^*$ identisch sind. U_p^* seien dabei geeignete Umgebungen von $p \in P_1$. Die Äquivalenzklasse von $X \in \mathcal{L}$ bezeichnen wir mit $[X]$.

Bemerkung 1: Wegen Eigenschaft 2) und 3) von Definition 3 können wir zu jedem $X \in \mathcal{L}$ Teilmengen E_i^1 definieren: sei χ der Fluß von X auf M und sei $e_i \subset U_i$ zu f und für eine Umgebung U_i von p_i wie auf S. 5 definiert. Sei $E_i^1 := \{p \in M | \chi(p) \cap e_i \neq \emptyset\}$. Zu jedem $X \in \mathcal{L}$ haben wir

also auch eine Teilmenge $K_X := \bigcup_{i=1,2,\dots} E_i^1$ definiert.

Man bemerke, daß der Beweis und damit die Aussage von Hilfssatz 3 richtig ist für K_X , E_i^1 und χ anstelle von K , E_1 und φ .

Satz 3 und 4 liefern einen für den Beweis von Lemma 1 wichtigen Spezialfall von (1) S. 21. Wir werden in Satz 4 eine Funktion f_{ij} angeben, für die Lemma 1 (S. 30) für das feste Paar i, j gilt. Um f_{ij} zu konstruieren, ändern wir f in einer Umgebung U von p_i geeignet ab.

Die folgenden Bezeichnungen werden in Satz 3 und 4 verwendet. Seien x lokale Koordinaten in einer Umgebung U des kritischen Punktes p_i . Seien $h'(x) = \sum_{j=1}^{r_i} x_j^2$ und $h''(x) = \sum_{j=r_i+1}^n x_j^2$. Wir können annehmen, daß die Umgebung U von p_i und die lokalen Koordinaten x in U so gewählt sind, daß in U die Funktion f gegeben ist durch $f(x) = -h'(x) + h''(x) + f(p_i)$. Sei $q' \in e_i$. Ohne Einschränkung ist $q' = (x_1', 0, \dots, 0)$, $x_1' > 0$, und bei der dazu nötigen Koordinatentransformation in U bleibt $f(x) = -h'(x) + h''(x) + f(p_i)$ erhalten.

Die folgende Aussage benötigen wir für kleine Umgebungen V von q' in e_i und für einen nahe bei p_i liegenden Punkt q' . Sei $F' := \{x \in U \mid \varepsilon_2 \leq f(x) \leq 2\varepsilon_2\}$, $\varepsilon_2 > 0$. (2)

Wir wollen in Satz 3 zeigen: es gibt eine Umgebung V von q' in e_i und eine Funktion f^+ in U , so daß von den Stromlinien $\chi(p)$ von f^+ , die in $f(x) - f(p_i) > 0$ liegen und p_i als Randpunkt haben, die Teilmengen $\chi(p) \cap F'$ in $V \times I_i$ liegen.

Wir können ohne Einschränkung voraussetzen, daß $0 < \lambda_1 < n$ ist. Sei $\varepsilon_1 > 0$ und $2\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Anstelle der Konstanten $2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2$ können wir auch Konstanten $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2$ wählen, für die $\varepsilon_1 < \varepsilon'_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon'_2$ gilt. Der übersichtlicheren Schreibweise wegen behalten wir die spezielle Wahl der Konstanten bei.

Satz 3: Es gibt eine Funktion f^+ in U mit folgenden Eigenschaften:

- 1) $f^+ \equiv f$ in U außerhalb einer Teilmenge $E \subset U$;
es ist $f(x) - f(p_1) \geq \varepsilon_1 > 0$ für $x \in E$.
- 2) f^+ hat in E keine kritischen Punkte.
- 3) Seien $\chi(p)$ die Stromlinien von f^+ in U ($p \neq p_1$).
 $\chi(p)$ liege in der Teilmenge $\{x \in U \mid f(x) - f(p_1) > 0\}$
und habe p_1 als Randpunkt. Dann ist $\chi(p) \cap F' \subset V \times I_1$
(s. (2)).

Beweis: Es sei $E := \{x \in U \mid \varepsilon_1 \leq f(x) \leq 2\varepsilon_2\}$. Die Funktion f^+ wollen wir in E so definieren, daß sie in einer Teilmenge E' von E unwesentlich von der Funktion $h^+(x) = x_1$ abweicht. Wenn wir dann noch die Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ (s.u.) geeignet wählen, erreichen wir, daß 3) gilt. Die Gültigkeit von 1) folgt aus der Definition von f^+ . Dabei ist nicht nur $f^+ \equiv f$ in $U-E$, sondern auch $f^+ \equiv f$ in einer Umgebung des Randes von U in M . Um Aussage 2) zeigen zu können, müssen wir eine Trennungsfunktion $g(x)$ in M geeignet definieren. Mit letzterem wollen wir beginnen.

Ohne Einschränkung sei $f(p_1) = 0$. Sei $\varepsilon_3 > 0$ und $0 < 2\varepsilon_1 < \varepsilon_2 - 2(x_1^1 + 4\varepsilon_3)$. Sei $c \in \mathbb{R}$ so gewählt, daß

$2\varepsilon_1 < c < \varepsilon_2$ ist. Sei
$$\begin{cases} g'(x) := x_1 \\ g''(x) := \sum_{j=2}^n x_j^2 \end{cases} \text{ für } x \in C :=$$

$= \{x \in U \mid f(x) = c\}$. Sei $x \in U$, $f(x) > 0$ und $\varphi(x) \cap C = \varphi_t(x)$ und
$$\begin{cases} g'(x) := g'(\varphi_t(x)) \\ g''(x) := g''(\varphi_t(x)) \end{cases} \quad (\text{s. HS 2}). \text{ Ferner sei}$$

$$g_1'(x) := \begin{cases} 1 - g_{\varepsilon_1, 2\varepsilon_1, f}(x) & \text{für } f(x) \leq 2\varepsilon_1 \\ g_{\varepsilon_2, 2\varepsilon_2, f}(x) & \text{für } f(x) \geq 2\varepsilon_1 \end{cases}$$

$$g_2'(x) := \begin{cases} 1 - g_{-2\varepsilon_3, -\varepsilon_3, g_1'}(x) & \text{für } x_1 \leq 0 \\ g_{x_1^1 + \varepsilon_3, x_1^1 + 2\varepsilon_3, g_1'}(x) & \text{für } x_1 \geq 0 \end{cases}$$

und $g_3'(x) := g_{\varepsilon_3, 2\varepsilon_3, g_1', g_2'}(x)$. Sei $g^*(x) = 1 - g_1'(x)g_2'(x)g_3'(x)$.

Sei $c'' = 2\varepsilon_3 + \frac{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$ und $f^+(x) := (1 - g^*(x))g'(x) + g^*(x)f(x) + c''(1 - g^*(x))$. Wir zeigen nun, daß f^+ keine kritischen Punkte außer p_1 in U hat. Es ist

$$f_{\Delta f}^+(x) = g^*(x)f_{\Delta f}(x) + (f(x) - g'(x) - c'')(-g_2'(x)g_3'(x)g_1'_{\Delta f}(x)).$$

Ist $f(x) \leq 2\varepsilon_1$, so ist $g_1'_{\Delta f}(x) \geq 0$ und $-f(x) + g'(x) + c'' \geq$

$$\geq -2\varepsilon_1 + \frac{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \geq 0. \text{ Ist } f(x) \geq \varepsilon_2, \text{ so ist}$$

$$-f(x) + g'(x) + c'' \leq -\varepsilon_2 + x_1^1 + 4\varepsilon_3 + \frac{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \leq 0 \text{ und}$$

$$g_1'_{\Delta f}(x) \leq 0, \text{ also } f_{\Delta f}^+(x) = g^*(x)f_{\Delta f}(x) +$$

$$+ |f(x) - g'(x) - c''|g_2'(x)g_3'(x)|g_1'_{\Delta f}(x)| > 0 \text{ falls}$$

$g^*(x) \neq 0, 1$ ist. Ist $g^*(x) = 0$, so ist $f^+(x) = c'' +$

$+ g'(x)$ und $f_{\Delta f}^+(x) \neq 0$ (HS 2), somit $\Delta f^+(x) \neq 0$, falls

$g^*(x) \neq 1$ ist.

Wir können ε_3 so klein wählen, daß gilt

$$(1) \text{ mit } \{x \in U \mid x_1 + \varepsilon_3 \leq g'(x) \leq x_1 + 2\varepsilon_3; \\ g''(x) \leq 2\varepsilon_3\} = D' : D' \cap F' \subset V \times I_1 \quad (1)$$

Da in $E' := \{x \in U \mid g^*(x) = 0\}$ die Funktionen f^+ und g' dieselben Niveauflächen haben, gilt: $\chi(p)$ sei eine Stromlinie, für welche die Voraussetzungen von 3) erfüllt sind. Dann verläuft $\chi(p)$ in

$\{x \in U \mid \varepsilon_1 \leq f(x); g'(x) \leq x_1 + \varepsilon_3\}$ innerhalb der Menge $B' := \{x \in U \mid 0 < g^*(x) < 1\}$ in Richtung wachsender x_1 -Werte. In D' verläuft $\chi(p)$ weiter in B' und schneidet $\delta F'$ in genau zwei Punkten x^1, x^2 mit $f(x^1) = \varepsilon_2$ und $f(x^2) = 2\varepsilon_2$. Wegen (1) gilt 3).

Lemma 1 (S.30) besagt: es gibt Vektorfelder, $X \in \mathcal{L}$, so daß für alle Paare $i, l \in \mathbb{N}$ gilt: $E_i^1 \cap \overline{E_l^1} = \emptyset$ oder $= E_l^1$. Hat die Mannigfaltigkeit M eine Funktion f mit nur endlich vielen kritischen Punkten, so kann man mit Hilfe von Satz 3 schon die Aussage von Lemma 1 zeigen. Man kann das Vektorfeld X als Gradientenfeld einer Funktion $f_0 \in F_M$ wählen, $X \equiv \Delta f_0$ auf M . Diese Behauptung werden wir im Anschluß an Satz 4 erläutern.

Gibt es keine Funktion $f \in F_M$ mit endlich vielen kritischen Punkten, so kann es sein, daß man in einer Umgebung eines kritischen Punktes p_i unendlich viele Abänderungen durchführen müßte wie in Satz 3, wenn man das Ergebnis von Lemma 1 erhalten will. Das liefert kein brauchbares Konstruktionsprinzip für das Vektorfeld X von Lemma 1. Wir werden deswegen im Beweis zu Lemma 1 anders vorgehen.

Wir werden die Abänderung von Δf , so daß Lemma 1 für das Paar i, j gilt, nicht in einer Umgebung von p_i vornehmen, sondern in einer Umgebung von p_j . Da nur für die i mit $i < j$ die Aussage von Lemma 1 verletzt sein kann und es nur endlich viele $i < j$ gibt, werden wir in einer Umgebung von p_j nur endlich viele Abänderungen von Δf vorzunehmen haben. Dann werden wir versuchen, mit Hilfe dieser abgeänderten Vektorfelder $X'_j \in [\Delta f]$ das Vektorfeld X von Lemma 1 zu konstruieren.

Zur Konstruktion der X'_j benötigen wir den folgenden Satz. U sei wie oben eine Umgebung von p_i . Satz 4 besagt, daß es eine Funktion f_{ij} auf M gibt, so daß für das feste Paar i, j und für $X = \Delta f_{ij}$ die Aussage von Lemma 1 gilt. Außerdem kann man zusätzlich verlangen, daß f_{ij} außerhalb dem Durchschnitt einer Umgebung von E_j mit U und innerhalb einer Umgebung U_{ij} von p_i mit f übereinstimmt.

Satz 4: Sei W_j eine Umgebung von E_j und $E_i \not\subset \overline{E_j}$. Es gibt eine Funktion $f_{ij} \in F_M$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $f_{ij} \equiv f$ in U außerhalb einer Teilmenge $E \subset U \cap W_j$; es ist $f(x) - f(p_i) > 0$ in E und $E \cap U_{ij} = \emptyset$.

2) f_{ij} hat keine kritischen Punkte in E .

3) seien $\psi(x)$ ($x \neq 0$) die Stromlinien von f_{ij} und $x \in U$. Dann ist für $\psi(x)$ mit $\psi(x) \cap e_j \neq \emptyset$ der Durchschnitt $\psi(x) \cap U_{ij} = \emptyset$.

Beweis: Gilt für das Paar i, j schon $E_i \cap \overline{E_j} = \emptyset$, so können wir $f_{ij} \equiv f$ wählen. Für eine geeignete Umgebung U_{ij} von p_i ist dann wegen der Kompaktheit von $\overline{E_j}$ der

Durchschnitt $\overline{E}_j \cap U_{ij} = \emptyset$. Den Fall $E_i \cap \overline{E}_j \neq \emptyset$ wollen wir mit Hilfe von Satz 3 erledigen.

1) Dazu zeigen wir zuerst, daß wir zu einem Punkt $q' \in e_i$ $q' \notin \overline{E}_j$ (q' existiert nach der Voraussetzung $E_i \not\subset \overline{E}_j$) eine Umgebung V in e_i finden können und ein $\varepsilon' > 0$, so daß $(\overline{V} \times I_1) \cap \overline{E}_j \cap \{x \in U \mid f(x) \leq \sqrt[2]{2\varepsilon'}\} = \emptyset$ ist, (1) wobei ε' unabhängig ist von der Größe von x_1' . Wollen wir nämlich Satz 3 sinnvoll anwenden, so muß $\varepsilon_2 < \varepsilon'$ und $\varepsilon_2 - 2(x_1' + 4\varepsilon_3) > 0$ wählbar sein. Das heißt, wir müssen ε' unabhängig vom Absolutbetrag von x_1' wählen können.

Die Gleichung (1) besagt, daß in einer genügend kleinen Umgebung E' von p_1 der Durchschnitt von $\overline{E}_j$ und einer Umgebung V' von q' leer ist. Dabei kann die Umgebung V' von q' noch geeignet gewählt werden, ($V' = V \times I_1$).

a) Wir zeigen (1). Sei $C' := \overline{E}_j \cap (\overline{e}_i - e_i)$. Zu C' gibt es in $(\overline{e}_i - e_i)$ eine offene Menge V_1 mit $C' \subset V_1$ und $\varphi(q') \cap \overline{V}_1 = \emptyset$. Denn C' und $\varphi(q') \cap (\overline{e}_i - e_i)$ sind punktfremde, abgeschlossene Mengen. Sei $V_1' := \{\varphi_t(p) \in e_i \mid p \in \overline{V}_1\}$. Es ist $V_1' \cap \varphi(q') = \emptyset$, also $(V_1' \times I_1) \cap (\{\varphi(q')\} \times I_1) = \emptyset$. (2). Da $\text{dist}(\overline{V}_1 - V_1, C') > 0$ und $(\overline{V}_1 - V_1) \times I_1$ und $\overline{E}_j$ abgeschlossene Mengen sind, ist für genügend kleines ε' $\text{dist}(\overline{E}_j \cap E', (\overline{V}_1 - V_1) \times I_1 \cap E') > 0$. Dann ist auch, da die Stromlinien von φ sich nicht schneiden, $E' \cap \overline{E}_j \subset V_1' \times I_1$ und wegen (2) gilt für eine geeignete Umgebung V von q' in e_i die Behauptung (1).

b) Wir wählen f^+ nach Satz 3 und ε_2 so, daß $F' \subset E'$ ist. Seien φ^+ die Stromlinien von f^+ und $E_j^+ := \{p \in M | \varphi^+(p) \cap e_j \neq \emptyset\}$. Dann gilt wegen 3) von Satz 3 und (1), daß $\overline{E_j^+} \cap e_i = \emptyset$ ist. Wegen der Aussagen von Satz 3 sind alle Bedingungen unseres Satzes erfüllt außer der Aussage $E \subset U \cap W_j$. Das zeigen wir nun.

2) Wir wollen f^+ (Satz 3) so abändern zu einer Funktion $f_{ij} \in F_M$, daß $f_{ij} \equiv f$ außerhalb einer Teilmenge $E \subset U \cap W_j$ gilt und für f_{ij} auch die anderen Aussagen von Satz 4 gültig sind. Seien W' , W'' (geeignet gewählte) Umgebungen von p_k . Sei $W' \subset W''$, $V_k := \{p \in M | \varphi(p) \cap W'' \neq \emptyset\}$ und $V'_k := \{p \in M | \varphi(p) \cap W' \neq \emptyset\}$.

Wir müssen nun noch einen Induktionsschluß nach $j - i \geq 0$ machen. Für $i=j$ ist $E_j \subset \overline{E_j}$. Sei für alle $0 \leq j-k < j-i$ schon gezeigt, daß $E_k \subset \overline{E_j}$ oder $E_k \cap \overline{E_j} = \emptyset$ ist. Sei (+) die Menge der k mit $E_k \subset \overline{E_j}$ und $i < k \leq j$. Es sei

$W_j = \bigcup_{k \in (+)} V_k$ und $W'_j = \bigcup_{k \in (+)} V'_k$. Sei $c > 0$ eine genügend klein gewählte Konstante und $\{x \in U | f(x) = c + f(p_i)\} =: C$. In C gibt es eine Trennungsfunktion $g_4(x)$ von $\overline{W'_j} \cap C$ und $C - W_j$ (s. auch die Definition von $g'_k(p)$ im Beweis zu Satz 2).

Sei $g_4(x) := g_4(\varphi_t(x))$ mit $\varphi_t(x) = \varphi(x) \cap C$. (HS 2). Es ist $g_4 \Delta f(x) = 0$ und $f_{\Delta f}^+(x) \geq 0$. Sei $f_{ij}(x) := g_4(x)f(x) + (1-g_4(x))f^+(x)$. f_{ij} hat in U keine kritischen Punkte außer p_i , denn es ist, falls $g_4(x) \neq 0$ ist, $f_{ij \Delta f}(x) = g_4(x)f_{\Delta f}(x) + (1-g_4(x))f_{\Delta f}^+(x) > 0$ außerhalb der Teilmenge von U , in der $f_{ij} \equiv f$ ist. Es ist $f_{ij} \equiv f$ außerhalb $W_j \cap U$. Seien $\psi(p)$ die Stromlinien von f_{ij} und $E_j^0 := \{p \in M | \psi(p) \cap e_j \neq \emptyset\}$. Sei

$D_1 = \{x \in U \mid g^*(x) \neq 1\}$ ($g^*(x)$ nach Satz 3). Es ist

$C_0 := \overline{E_j} \cap \overline{D_1}$ abgeschlossen in M und

(3) $\text{dist}(C_0, \delta W_j^1) > 0$. Wegen (3) kann x_j^1 und (3)

ε_3 (s. Satz 3) so klein gewählt werden, daß E_j^+ in W_j^1 liegt. Die Abänderung von f^+ zu f_{ij} erhält die Stromlinien von E_j^+ . Für eine geeignete Umgebung U_{ij} von p_i ist $E_j^+ \cap U_{ij} = \emptyset$ und wegen $E_j^0 = E_j^+$ ist $E_j^0 \cap U_{ij} = \emptyset$.

Mit Satz 4 folgt die oben erwähnte Aussage:

Bemerkung 2: Gibt es auf M eine Funktion $f \in F_M$ mit nur endlich vielen kritischen Punkten, so gibt es eine Funktion $f_0 \in F_M$, für deren Gradienten $X = \Delta f_0$ Lemma 1 gilt.

Beweis: Für den kritischen Punkt p_1 brauchen wir f nicht abzuändern, um die Aussage von Lemma 1 für $i=1$ zu erhalten, da $E_1 = \{p_1\}$ ist. Haben wir für jeden kritischen Punkt p_i von f mit $i < k$ die Aussage von Lemma 1 gezeigt. Wir wählen Umgebungen U_i von p_i und eine Umgebung V' von E_k so, daß für alle $i < k$ gilt $V' \cap U_i = \emptyset$, falls nicht $E_i \subset \overline{E_k}$ ist. In einer Umgebung $U \subset V'$ von p_k wenden wir, falls nötig, in disjunkten Teilmengen von U für die endlich vielen kritischen Punkte p_j mit $k < j$ Satz 4 an und erhalten die Aussage von Lemma 1 für alle $i \leq k$. Nach endlich vielen Schritten erhalten wir eine Funktion f_0 mit den gewünschten Eigenschaften.

Sei $X \in \mathcal{L}$, χ der Fluß von X auf M und $E_j^1 := \{p \in M \mid \chi(p) \cap e_j \neq \emptyset\}$.

Lemma 1: Sei $f \in F_M$. In jeder Klasse $[\Delta f]$ (s.S.22) gibt es ein Vektorfeld X , so daß für alle Paare i, l gilt

$$E'_1 \cap \overline{E'_1} = \phi \quad \text{oder} = E'_1.$$

Beweis: Wir konstruieren X induktiv. Ist $l = 1, 2$, so gilt Lemma 1 trivialerweise. Sei $X_1 = \Delta f = X_2$. Wir nehmen an, daß wir Vektorfelder $X_1, \dots, X_k$, $X_1 \in [\Delta f]$, so konstruiert haben, daß gilt: sei $2 \leq j \leq k$. Für geeignete Zahlen $\varepsilon = \varepsilon(p_j)$, $\varepsilon' = \varepsilon'(p_j)$ mit $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ ist $X_j \equiv X_{j-1}$ in $M^{f(p_j)-\varepsilon}$ und $X_j \equiv \Delta f$ in $M-M^{f(p_j)-\varepsilon'}$. Außerdem soll X_j so beschaffen sein, daß für $X_j|^{M^{C_j}}$ und $f(p_j) < c_j < f(p_{j+1})$ mit X_j , M^{C_j} anstelle von X , M (bei geeigneter Abänderung von f auf M^{C_j}) Lemma 1 gilt.

(1)

Wir konstruieren dann ein Vektorfeld $X_{k+1} \in [\Delta f]$, so daß (1) mit $k+1$ anstelle von k gilt.

Wegen $X_k \equiv X_{k-1}$ in $M^{f(p_k)-\varepsilon}$ definiert die Folge der Vektorfelder X_k eindeutig ein Vektorfeld $X \in [\Delta f]$, für das nach Konstruktion Lemma 1 gilt.

Es sei also $X_1, \dots, X_k \in [\Delta f]$ schon konstruiert. Wir wollen X_{k+1} mit obigen Eigenschaften (1) bestimmen.

Dazu bestimmen wir Vektorfelder $X'_1 = X_k$, $X'_2, \dots, X'_k = X_{k+1} \in [\Delta f]$ mit folgenden Eigenschaften: sei

$\varepsilon = \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_k = \varepsilon'$. Es gelte $X'_r \equiv X'_{r-1}$ in $M^{f(p_{k+1})-\varepsilon_{r-1}}$; ferner soll $X'_r \equiv \Delta f$ in $M-M^{f(p_{k+1})-\varepsilon_r}$

gelten und für X'_r anstelle von X , für $l = k+1$ und

$l-i \leq r-1$ soll die Behauptung von Lemma 1 erfüllt sein.

Ist für $l=k+1$ und $i=k$ die Behauptung von Lemma 1 erfüllt,

so setzen wir $X'_2 \equiv X_k$. Gilt für dieses Paar l, i die Be-

hauptung nicht, so machen wir die folgende Abänderung von X_k . Seien U'_1, U_1 Umgebungen von p_1 und

$U_1 \subset U'_1$ (2). Sei $V := \{p \in M \mid \varphi(p) \cap U'_1 \neq \emptyset\}$ und (2)

$V' = V \cap W_1$. W_1 sei dabei eine Umgebung von $\overline{E}_1$. In $V' \cap (M^{f(p_1)-\epsilon_2} - M^{f(p_1)+\epsilon_2})$ liegt kein kritischer Punkt von f , es gibt also einen nach ([11], S. 13) bestimmten Diffeomorphismus

$$h: \left\{ \begin{array}{l} V' \cap (M^{f(p_1)+\epsilon} - M^{f(p_1)+\epsilon_2}) =: V_0 \rightarrow V' \cap (M^{f(p_1)-\epsilon_2} - M^{f(p_1)-\epsilon}) =: C'_0 \\ p \longrightarrow \varphi(f(p_1) - f(p_1) - \epsilon - \epsilon_2)(p) \end{array} \right\} \quad (3)$$

Dabei sei die Teilmenge E von Satz 4 in V_0 enthalten.

Die Bilder der Stromlinien von f_{i1} unter h liefern in C'_0 eine Stromlinienschar ψ' . Ein durch ψ' in C'_0 erzeugtes Vektorfeld schließt außerhalb einer in C'_0 liegenden Teilmenge von M unendlich oft differenzierbar an das Vektorfeld X_k an. Wir setzen es durch X_k zu einem Vektorfeld auf M fort. Das so auf M erzeugte Vektorfeld bezeichnen wir mit X'_2 . X'_2 erfüllt obige Behauptung.

Sei X'_j , $j \geq 2$ schon konstruiert. Ist für das Paar $l=k+1$ und $i=l-j=k+1-j$ die Behauptung von Lemma 1 richtig, so setzen wir $X'_{j+1} \equiv X'_j$. Gilt die Behauptung nicht, so ändern wir X'_j folgendermaßen ab.

Sei $(+)$ die Menge der $s < k+1$ mit $E_s \subset \overline{E}_{k+1}$. Ohne Einschränkung ist $\overline{U}_1 \cap E_s = \emptyset$ (s.(2)). für alle $s \in (+)$.

Sei φ^j die Stromlinienschar von X'_j . Sei

$V_1 = \{p \in M \mid \varphi^j(p) \cap U_1 \neq \emptyset\}$; sei W'' eine Umgebung von p_1 und $W_1^* := \{p \in M \mid \varphi^j(p) \cap W'' \neq \emptyset\}$. Ohne Einschränkung ist $f_{i1} \equiv f$ außerhalb $U_1 \cap W_1^*$ (s.Satz 4). Da in

$\overline{W}_1 \cap \overline{V}_1 \cap (\overset{\circ}{M}^{f(p_1)} - M^{f(p_1)})$ keine kritischen Punkte liegen, existiert dort der Diffeomorphismus nach (3). Wir können wie oben (für X'_2) schließen und erhalten so das Vektorfeld X'_{j+1} .

Definition 2': Sei $X \in \mathcal{L}$ und $f \in F_M$ die nach Definition 3, 2) zu X gehörige Funktion. K_X heißt schwacher Deformationsretrakt von M , wenn für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Menge $K_X^c := \bigcup_{p_i \in M^c \cap \mathcal{P}} E_1^i$ Deformationsretrakt von M^c ist.

Sei $f \in F_M$ und $X \in \mathcal{L}$ zu f konstruiert wie in Lemma 1. Dann gilt

Bemerkung 3: K_X ist schwacher Deformationsretrakt von M . Der Beweis geht wörtlich wie in §2) für K .

Bemerkung 4: K_X ist d.u.n.d. Deformationsretrakt von M , wenn f auf M nur endlich viele kritische Punkte $p_1, \dots, p_r$ hat.

Beweis: p_1 ist ohne Einschränkung der einzige kritische Punkt von f auf M vom Index 0 (s.Satz 5, unten).

Sei $A := \overline{K_X} - K_X$. Hat f auf M nur endlich viele kritische Punkte, so ist $A = \emptyset$. Hat f auf M unendlich viele kritische Punkte, so ist $A \neq \emptyset$, da $U_1 \cap \overline{E_j} \neq \emptyset$ für alle j ist. (U_1 sei eine Umgebung von p_1 in M .) Da eine Deformation von M auf K_X als Schar von stetigen Abbildungen auch die Punkte aus A festläßt, gilt die Behauptung.

§4) Verallgemeinerung eines Satzes von Morse

Morse zeigte ([13]), daß es auf einer kompakten Mannigfaltigkeit $M = M^n$ polar nichtentartete Funktionen gibt. Das sind nicht entartete Funktionen, die auf M nur einen kritischen Punkt vom Index 0 und nur einen kritischen Punkt vom Index n besitzen.

Das analoge Ergebnis wollen wir für nichtkompakte Mannigfaltigkeiten zeigen: es gibt auf jeder nichtkompakten Mannigfaltigkeit Funktionen aus F_M , die auf M nur einen kritischen Punkt vom Index 0 und keinen kritischen Punkt vom Index n haben. Genauer gilt:

Satz 5: Sei $f \in F_M$. Seien $P = \{p_1, p_2, \dots\}$ die kritischen Punkte von f auf M . Dann gibt es eine Funktion $f' \in F_M$, so daß

- 1) die kritischen Punkte $Q = \{q_1 = p_1, q_2, \dots\}$ von f' auf M eine Teilmenge von P sind;
- 2) für die Indizes λ_1^i von f' in q_1 gilt: $0 < \lambda_1^i < n$ für $i \geq 2$;
- 3) zu jedem $p_1 \in P - Q$ mit $\lambda_1 = 0$ oder $\lambda_1 = n$ (1) gibt (1) es eine Stromlinie $\varphi(p')$, $p' \in M$, mit $p_1 \in \overline{\varphi(p')}$ und eine Umgebung Z_1 von $\varphi(p')$, so daß außerhalb $\bigcup_{\ell \in \text{mit}(q)} Z_1$ f und f' dieselben Niveauflächen haben.

Aus Satz 5 folgt mit der auf S. 13 gemachten Bemerkung über kompakte Mannigfaltigkeiten N , daß der Satz von

Morse als Spezialfall in Satz 5 enthalten ist.

Satz 5 erhalten wir, wenn wir den folgenden Satz gezeigt haben.

Satz 6: Sei $f \in F_M$ und $\lambda_1 = n$. Dann gibt es eine Funktion $f_1 \in F_M$ und einen kritischen Punkt p_j von f mit den Eigenschaften:

- 1) es ist $\lambda_j = n-1$
- 2) es gibt eine Stromlinie $\varphi(p')$, $p' \in M$, von f mit $p_i, p_j \in \overline{\varphi(p')}$;
- 3) außerhalb einer Umgebung Z_i von $\overline{\varphi(p')}$ haben f_1 und f dieselben Niveaulächen;
- 4) in Z_i ist $\Delta f_1(p) \neq 0$.

Definition 4: Sei $p \in M$. Sei U eine Umgebung von p in M mit lokalen Koordinaten $x = (x_1, \dots, x_n)$ und sei $p \leftrightarrow 0$. Die Menge $\{x \in U \mid x_{m+1} = \dots = x_n = 0; x_i \geq 0 \text{ für ein } i \text{ mit } 1 \leq i \leq m\}$ nennen wir m -dimensionale Halbumgebung von p .

Bevor wir den Beweis von Satz 6 durchführen, zeigen wir einige Hilfssätze. In Hilfssatz 4 und 5 zeigen wir die Existenz von p_j mit den Eigenschaften 1) und 2) von Satz 6 und mit einer zusätzlichen Eigenschaft, die wir später benötigen, um f_1 konstruieren zu können. Diese Eigenschaft besagt, daß $\overline{E}_i$ eine n -dimensionale Halbumgebung von p_j in einer Umgebung U_j von p_j ist und $E_j \cap U_j$ als Rand hat.

Bei der Konstruktion von f_1 möchten wir so weit wie möglich die Niveaulächen von f benutzen. Wir wollen

diese Niveauflächen nur in einer Umgebung Z_i von $\overline{\varphi(p')}$ in M abändern. Da in einer Umgebung U_i von p_i jedoch mit geeignetem $a, b \in \mathbb{R}$ und $0 < a, 0 < b$ gilt $f(p) \geq f(p_i) - a > f(p_j) + b$ und in einer Umgebung U_j von p_j gilt $f(p) \leq f(p_j) + b$, können wir nicht erwarten, daß es genügt, außerhalb Z_j für die Funktion f' die Funktion f zu nehmen. Vielmehr werden wir f auf einer Umgebung V_{ij} von $\overline{E_i} - M^{f(p_j)}$ so abzuändern haben zu einer Funktion g_{ij} , daß zwar g_{ij} dieselben Höhenflächen auf V_{ij} hat wie f , daß aber in U_i die Funktionswerte $g_{ij}(p) \leq f(p_j) - a$ sind. Die Funktion g_{ij} wird so konstruiert, daß sie in $M - \overline{E_j}$ definiert ist und außerhalb einer Teilmenge $V_{ij} \subset M^{f(p_j)-c, f(p_i)}$, $c > 0$, gilt $g_{ij} \equiv f$. Die Existenz von g_{ij} zeigen wir in Hilfssatz 6 und 7. In Hilfssatz 8 konstruieren wir eine Hilfsfunktion f'' , die wir im Beweis zu Satz 6 benötigen. Für die folgenden Hilfssätze sollen die Voraussetzungen von Satz 6 erfüllt sein.

Hilfssatz 4: Es gibt einen kritischen Punkt p_j von f , so daß $p_j \in \overline{E_i}$ ist und $\overline{E_i}$ keine n -dimensionale Umgebung von p_j enthält.

Beweis: Wäre die Behauptung des Hilfssatzes für kein j erfüllt, so wäre $\overline{E_i}$ eine geschlossene Mannigfaltigkeit. Da M nichtkompakt ist, ist $\overline{E_i} \neq M$. Da $\overline{E_i}$ eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist, müßte M mindestens zwei Zusammenhangskomponenten haben, Widerspruch zu "' M zusammenhängend'".

Hilfssatz 5: Es gibt einen kritischen Punkt $p_j \in \overline{E}_1$ von f , so daß $\lambda_j = n-1$ ist und $\overline{E}_1$ eine n -dimensionale Halbumgebung von p_j in einer Umgebung U_j von p_j in M ist mit Rand $E_j \cap U_j$. Es gibt eine Stromlinie $\varphi(p')$, $p' \in M$, von f mit $p_i, p_j \in \overline{\varphi(p')}$.

Beweis: Unter den kritischen Punkten aus $\overline{E}_1$, für die $\overline{E}_1$ keine n -dimensionale Umgebung enthält, wählen wir p_j mit maximalem j aus. Wir wollen zeigen, daß $\lambda_j = n-1$ ist. Wir nehmen an, es sei $\lambda_j < n-1$ und führen die Annahme zu einem Widerspruch. In $\overline{E}_1 \cap (M - M^{f(p_j)+\varepsilon})$ ($\varepsilon > 0$) ist jeder Punkt von $\overline{E}_1$ innerer Punkt, da j maximal gewählt ist. (1) Es ist $\text{Rd } I_j := \overline{I}_j - I_j$ diffeomorph zu $S^{n-\lambda_j-1}$. Wegen $\lambda_j < n-1$ ist $\text{Rd } I_j$ zusammenhängend. Gäbe es ein $p \in \text{Rd } I_j$ mit $p \notin \overline{E}_1$, so gäbe es eine differenzierbare Kurve g in $\text{Rd } I_j$, die einen Punkt $q' \in \overline{E}_1 \cap \text{Rd } I_j$ mit p verbindet. Auf dieser Kurve gäbe es von q' aus einen ersten Punkt $q \in \overline{E}_1$, so daß $\overline{E}_1$ keine Umgebung von q in M enthält, - Widerspruch zu (1), da wir ε so wählen können, daß $\text{Rd } I_j \subset M - M^{f(p_j)+\varepsilon}$ ist. Also ist $\text{Rd } I_j \subset \overline{E}_1$, damit enthielte aber $\overline{E}_1$ eine n -dimensionale Umgebung von p_j , - Widerspruch zur Definition von p_j . Somit muß $\lambda_j = n-1$ sein. Man schließt wie für $\lambda_j < n-1$, daß $\text{Rd } I_j \not\subset \overline{E}_1$ ist. Da $\text{Rd } I_j$ diffeomorph zu S^0 ist, besteht $\overline{E}_1 \cap \text{Rd } I_j$ aus einem Punkt. Wir wollen nun zeigen, daß $E_1 \cap I_j$ aus einem Teilstück einer Stromlinie $\varphi(p')$ von f mit $\overline{\varphi(p')} \supset p_i, p_j$ besteht. Für ein k mit $j < k < i$ kann gelten: $E_k \subset \overline{E}_1$ und $\overline{E}_k \cap E_j \neq \emptyset$. (2). Diesen Fall wollen wir ausschließen, da für die Stromlinie $\varphi(p')$ mit $\overline{\varphi(p')} \supset \overline{E}_1 \cap I_j$ sonst gilt $p_k \in \overline{\varphi(p')}$ und nicht gilt

$p_i \in \overline{\varphi(p')}$. Gibt es ein k mit (2), so gibt es eine Umgebung U_j von p_j , so daß $\overline{E_i} \cap U_j \cap \overline{E_1} = \emptyset$ ist für $j < l < i$ und $l \neq k$. Da $\lambda_k \leq n-1 = \lambda_j$ ist, ist $E_j \not\subset \overline{E_k}$ aus Dimensionsgründen. In U_j kann man dann eine Abänderung von f nach Satz 4 mit k anstelle von j und j anstelle von i machen. Dann ist $E_j \cap \overline{E_1} = \emptyset$ für alle l mit $j < l < i$ und $E_1 \subset \overline{E_i}$. Für die Stromlinie $\varphi(p')$ mit $E_i \cap I_j \subset \varphi(p')$ gilt deswegen $\overline{\varphi(p')} \ni p_i$. Ohne Einschränkung können wir

dann die lokalen Koordinaten x in U_j so wählen, daß $(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ die Teilmenge $E_j \cap U_j$ aufspannt,

$U_j \cap \varphi(p') = \{(0, \dots, 0, x_n) \mid x_n < 0\}$ und $f(x) = f(p_j) - \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 + x_n^2$ ist. Dann ist $\{(0, \dots, 0, x_n) \mid x_n > 0\} \cap \overline{E_1} = \emptyset$.

Sei $j \leq v \leq i-1$ und $f(p_v) < d_v < f(p_{v+1})$ (i, j wie in HS 5). Sei $\varphi(p')$ wie in HS 5 definiert und C_v die Zusammenhangskomponente von ∂M^{d_v} , die den Punkt $\varphi(p') \cap \delta M^{d_v}$ enthält. Sei $q' = (0, \dots, 0, x_n) \in U_j$ mit $x_n > 0$, also $q' \notin \varphi(p')$. Sei D_v die Zusammenhangskomponente von δM^{d_v} , die den Punkt $\varphi(q') \cap \delta M^{d_v}$ enthält. Wir zeigen zuerst:

Hilfssatz 6: Es ist $D_v \cap C_v = \emptyset$ für $v=j, \dots, i-1$.

Beweis: Aus dem Beweis zu HS 5 folgt, daß wir voraussetzen können, daß $\delta M^{d_v} \cap \overline{E_1}$ keine Randpunkte (in δM^{d_v}) besitzt. Dann gehört aber die Zusammenhangskomponente E_v von δM^{d_v} ganz zu $\overline{E_1}$. Da $\varphi(q') \cap \overline{E_1} = \emptyset$ ist, ist $D_v \neq C_v$ und damit $D_v \cap C_v = \emptyset$.

Zur Vereinfachung der folgenden Beweise wählen wir $\varepsilon > 0$ so, daß $\overline{e_j} = \{x \in U_j \mid \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 \leq 3\varepsilon, x_n = 0\}$ ist.

Hilfssatz 7: Sei $B := \overline{E_i} \cap M^{f(p_j)-3\varepsilon, f(p_i)}$. Dann gibt

es eine Funktion $g_{ij} \in D_{M-\bar{e}_j}$, so daß

- 1) $g_{ij} \equiv f$ in $M - B$ ist ;
- 2) g_{ij} hat dieselben Niveaulächen wie f in $M - \bar{e}_j$;
- 3) es ist $g_{ij}(p) \leq f(p_j) - \epsilon$ auf B .

Beweis: Auf B definieren wir $g(p) = c + \frac{\epsilon}{f(p_j) - c} (f(p) - c)$ mit $c = f(p_j) - 2\epsilon$. Ohne Einschränkung gilt auf B $f(p_j) - 3\epsilon \leq g(p) \leq f(p_j) - \epsilon$. g erfüllt die Aussage 2). Wir müssen g an f als C^∞ -Funktion anschließen. Sei $g_1(p) = g_{c-\epsilon, c, f}(p)$ auf M . Sei $g_{ij}(p) :=$

$$= \begin{cases} g_1(p)f(p) + (1-g_1(p))g(p) & \text{in } B - \bar{e}_j \\ f(p) & \text{für } p \in M - B \end{cases}.$$

g_{ij} ist eindeutig definiert und $g_{ij} \in D_{M - \bar{e}_j}$. Ferner ist in B die Ungleichung $f(p) \leq g(p)$ erfüllt, falls $g_1(p) > 0$ ist. Somit gilt $g_{ij}\Delta f(p) = g_1(p)f_{\Delta f}(p) + (1-g_1(p))g_{\Delta f}(p) + (f(p)-g(p))g_{1\Delta f}(p) > 0$ falls $0 < g_1(p) < 1$ ist. g_{ij} erfüllt 1) - 3) von HS 7.

Es sei Z_1 eine geeignete (s.S. 41) Umgebung von $\varphi(p')$, wobei $\varphi(p')$ die nach HS 5 gewählte Stromlinie von f sei.

Wir konstruieren in Z_1 eine Funktion $f'' \in D_{Z_1}$, für die dort $\Delta f'' \neq 0$ ist. Sei U_1 eine Umgebung von p_1 .

Seien y lokale Koordinaten in U_1 , so daß $f(y) = f(p_1) - \sum_{k=1}^n y_k^2$ und $\varphi(p') \cap U_1 = \{(y_1, 0, \dots, 0) | y_1 > 0\}$ gilt.

Seien x lokale Koordinaten in U_j wie in HS 5. Sei

$$h'(p) = \begin{cases} y_1 & \text{in } U_1 \\ x_n + c & \text{in } U_j, c \in \mathbb{R} \quad (\text{s.u.}) \end{cases}.$$

Hilfssatz 8: Es gibt eine Funktion f'' in Z_1 ,

$f'' \in D_{Z_1}$, die in $Z_1 - (U_1 \cup U_j)$ mit $-f + a$, $a \in \mathbb{R}$, übereinstimmt und in $\{y \in U_1 \mid y_1 \leq 0\} \cup \{x \in U_j \mid x_n \geq 0\}$ mit h' übereinstimmt und für die $\Delta f'' \neq 0$ in Z_1 ist. Ferner ist $|f''(p) - f''(q)| < \epsilon$ für alle $p, q \in Z_1$.

Beweis: Seien $a', b', c', d' \in \mathbb{R}$ nahe bei 0 liegende Konstanten und $0 < a' < b'; c' < d' < 0$. Sei $g^x(p) =$

$$= \begin{cases} g_{a', b', h'}(p) & \text{in } U_1 \\ 1 - g_{c', d', h'-c'}(p) & \text{in } U_j \\ 0 & \text{in } Z_1 - (U_1 \cup U_j) \end{cases}$$

Wir definieren $f^x(p) = g^x(p)h'(p) + (1 - g^x(p))(-f(p) + a)$.

Wir wollen zeigen, daß $\Delta f^x \neq 0$ ist in Z_1 . In

$U_1 \cap \{y \mid y_1 > 0\}$ ist $-f_{\Delta h'}(y) = 2y_1 > 0$ und $f(p) + h'(p) - a \leq 0$

bei geeigneter Wahl von $a \in \mathbb{R}$. In $U_j \cap \{x \mid x_n < 0\}$ ist

$-f_{\Delta h'}(x) = -2x_n > 0$ und $f(p) + h'(p) - a \geq 0$ bei ge-

eigneter Wahl von c . Somit ist $f_{\Delta h'}^x = g^x h'_{\Delta h'} +$

$+(1 - g^x)(-f_{\Delta h'}) + (h' + f - a)g_{\Delta h'}^x > 0$ falls $g^x(p) \neq 0$ ist.

Für $g^x(p) = 0$ ist $f_{(-\Delta f)}^x(p) > 0$. Es ist $|f^x(p) - f^x(q)| < m$

für $p, q \in Z_1$ und eine geeignete Konstante $m > 0$. Sei

$f''(p) = \frac{\epsilon}{m} f^x(p)$. f'' erfüllt alle Aussagen unseres Hilfssatzes.

Nun zum Beweis von Satz 6.

Sei p_j nach Hilfssatz 5 gewählt. Mit Hilfe von g_{ij} nach Hilfssatz 7 und f'' nach Hilfssatz 8 wollen wir die Funktion f_i konstruieren. Dazu benötigen wir noch geeignete Trennungsfunktionen. Es sei $g_1(p) =$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} 1 - g_{c', d', h'}(p) & \text{in } U_1 \\ g_{a', b', (h'-c)}(p) & \text{in } U_j \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} a', \dots, d' \text{ und } h' \text{ seien wie} \\ \text{in Hilfssatz 8 gewählt.} \end{array}$$

Auf $\{x \in U_j | x_n = 0\}$ haben wir in U_j die Funktion $h''(x) = \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2$. Seien ψ die Stromlinien von f' in Z_1 . Wir setzen $h''(q) = h''(\psi_t(q))$ für $q \in Z_1$, wobei $\psi_t(q) = \psi(q) \cap \{x \in U_j | x_n = 0\}$ ist (s. Hilfssatz 2). Es ist $h'' \in D_{Z_1}$ und $Z_1' = \{q \in Z_1 | h''(q) \leq 4\epsilon\}$, $\epsilon > 0$ ist eine Umgebung von $\overline{\varphi(p')}$. Bei geeigneter Wahl von Z_1 ist

$Z_1' = (U_1 \cup U_j) \subset Z_1$. Wir definieren für $p \in Z_1$:
 $g_2(p) = 1 - g_{\epsilon, 2\epsilon, h''}(p)$ und $g_3(p) = g_{3\epsilon, 4\epsilon, h''}(p)$. Sei
 $d' < a_1 < a_2 < 0$ und $0 < b_1 < b_2 < a'$. Sei $g'(p) =$

$$= \begin{cases} 1 - g_{a_1, a_2, h''}(p) & \text{in } U_1 \cap \underbrace{\{p \in Z_1 | g_2(p) < 1\}}_{=: C} \\ g_{b_1, b_2, (h' - c)}(p) & \text{in } U_j \cap C \end{cases}$$

Sei $g_0(p) = g_1(p)g_2(p)g_3(p)$. Sei $A = \{p \in Z_1 | g_0(p) = 1\}$. Wir wollen nun mit den Funktionen g_{ij} nach Hilfssatz 7 und f' nach Hilfssatz 8 eine Funktion $f_0 \in D_{M-A}$ konstruieren, so daß $f_0 \equiv f' + b$ mit $b \in \mathbb{R}$ auf C ist, falls $g'(p) = 1$ ist und in $M - Z_1$ gilt $f_0 \equiv g_{ij}$. Die Funktion f_0 wird uns für $g_0(p) = 0$ unsere Funktion f_i liefern. In $\{p \in Z_1 | 0 < g_0(p)\}$ werden wir f_i noch zu definieren haben, so daß $f_i \in F_M$ ist und $\Delta f_i \neq 0$ in Z_1 gilt. Nun zuerst zur Definition von f_0 . Definieren wir $g'(p) = 1$ für $p \in C - (U_1 \cup U_j)$ und $g'(p) = 0$ auf $M - C$, so ist $g' \in D_{M-A}$. Sei $f_0(p) := g'(p)(f'(p) + b) + (1 - g'(p))g_{ij}(p)$ für $p \in M - A$. Es ist $f_0 \in D_{M-A}$. Wir haben noch zu zeigen, daß bei geeigneter Wahl von b gilt

$\Delta f_0 \neq 0$ in $Z_1 - A$. Es ist $f_0 \Delta f'' = g' f' \Delta f'' + (1 - g')g_{ij} \Delta f'' + (f' + b - g_{ij})g' \Delta f''$. In $U_1 \cap \{y | y_1 < 0\} = D_1$ ist $g_{ij} \Delta f'' > 0$, da $f \Delta f'' = -2y_1 > 0$ ist. In $U_j \cap \{x | x_n > 0\} = D_j$ ist $g_{ij} \Delta f'' = f \Delta f'' = 2x_n > 0$. In U_1

ist $g_{ij} \leq f(p_j) - \varepsilon$ und in $U_j \cap C$ ist, falls $g' < 1$ ist, ohne Einschränkung $g_{ij}(p) \geq f(p_j)$; denn wir werden $a^2 = 3\varepsilon$ wählen, also ist für $x_n = a'$: $f(x) = -h''(x) + x_n^2 + f(p_j) \geq f(p_j) + \varepsilon$ und für genügend großes b_1 noch $g_{ij}(p) \geq f(p_j)$ in $U_j \cap C$. Sei $c = \inf_{p \in A} f''(p)$. Wir wählen $b = -c + f(p_j) - \varepsilon$. Dann ist $f'' + b - g_{ij} \geq c + b - f(p_j) + \varepsilon = 0$ in $U_i \cap C$ und in $U_j \cap C$ für $g' < 1$ gilt $f'' + b - g_{ij} \leq \varepsilon + c + b - f(p_j) = 0$. Ferner ist $g'_{Af''} \geq 0$ in U_i , $g'_{Af''} \leq 0$ in U_j . Somit ist $f_{0Af''} > 0$ in $D = Z_i - A \cup \{p \in Z_i \mid g_3(p) < 1\}$ und damit $\Delta f_0 \neq 0$ in $Z_i - A$.

Wir haben oben die Funktion h'' in Z_i definiert. Diese Funktion und die Funktion f_0 benutzen wir nun, um die gesuchte Funktion f_i zu erhalten. Wir definieren $f_i(p) = (1 - g_0(p))f_0(p) + g_0(p)(-h''(p) + e)$ mit $e \in \mathbb{R}$. Sei im folgenden $0 < g_0(p) < 1$. Nur dort brauchen wir $\Delta f_i \neq 0$ zu zeigen, da $\Delta h'' \neq 0$ in A gilt. Wir zeigen, daß auf $\{p \mid 0 < g_1(p) < 1\} \cup D$ gilt $f_{iAf''} > 0$. Auf $\{p \in Z_i \mid g_3(p) < 1\} - (\bar{D}_i \cup \bar{D}_j)$ gilt $h'_{Af''} = g_{0Af''} = 0$ und $f_{0Af''} = g_{ij\Delta f''} < 0$, somit auch $\Delta f_i \neq 0$. Es bleibt dann noch zu zeigen, daß auf $B = (\bar{D}_i \cup \bar{D}_j) \cap \{p \in Z_i \mid g_1(p) = 1\} - D$ gilt $\Delta f_i \neq 0$. Auf B werden wir zeigen, daß $f_{i\Delta h''} < 0$ ist. Damit haben wir dann $\Delta f_i \neq 0$ auf Z_i bewiesen. - Ist $g_1(p) = 1$, so ist $g_{0Af''} = 0$ und da auf D gilt $f_{0Af''} > 0$, ist dort $f_{i\Delta f''} = (1 - g_0)f_{0Af''} + (-h'' + e - f_0)g_3g_2g_1\Delta f'' > 0$. Wir wollen nun auf D' zeigen, daß $f_{i\Delta f''} > 0$ ist. In U_i haben wir $g_{1\Delta f''} \geq 0$, in U_j ist $g_{1\Delta f''} \leq 0$. Wir wählen $e = f(p_j) + 3\varepsilon$. Da

in $U_1 \cap D'$ gilt $f_0(p) \leq f(p_j) - \varepsilon$, ist $-h'' + e - f_0 \geq -4\varepsilon + e - f(p_j) + \varepsilon = 0$. In $U_j \cap D'$ ist $f_0(x) = -h''(x) + x_n^2 + f(p_j)$, somit $-h''(x) + e - f_0(x) = e - x_n^2 - f(p_j) = 3\varepsilon - x_n^2 \leq 0$, wenn wir $a'^2 = 3\varepsilon$ wählen. Somit ist auf D' : $(-h'' + e - f_0)g_3g_2g_1df'' \geq 0$. Da auf $D_i \cup D_j$ gilt $f_{0df''} = g_{ij}df'' > 0$ falls $0 < g_1(p) < 1$ ist, folgt, daß $f_{idf''} > 0$ auf D' gilt.

Wir zeigen nun noch, daß auf B ist $f_{idh''} < 0$. Auf B ist $f_0(p) = g_{ij}(p)$ und $g_{ij}dh''(p) \leq 0$. Ferner ist $g_{0dh''}(p) = g_{3dh''}(p) \leq 0$. In $U_1 \cap B$ ist $-h'' + e - f_0 \geq 0$. Da wir $a'^2 = 3\varepsilon$ gewählt haben, gilt $-h'' + e - f_0 = e - x_n^2 - f(p_j) = 3\varepsilon - x_n^2 \geq 0$ in $U_j \cap B$. Somit ist $f_{idh''} = (1 - g_0)f_{0dh''} - g_0h''_{dh''} + (-h'' + e - f_0)g_{0dh''} < 0$ auf B falls $g_0(p) \neq 0$ ist.

Nun zum Beweis von Satz 5.

Die Abänderung von f zu f_i ist nicht immer in verschiedenen Teilmengen von M durchführbar für verschiedene Werte i . Da auf $M^{f(p_j-1)}$ gilt $f_i \equiv f$, haben wir für jeden Punkt $p \in M$ jedoch höchstens endlich viele solche Abänderungen durchzuführen. Nach diesen endlich vielen Abänderungen, die wir lokal durchzuführen haben, erhalten wir eine eindeutig auf M definierte Funktion f_1 . Für f_1 gilt 1) - 3) von Satz 5 mit $0 \leq \lambda_1' < n$ bei der Aussage 2).

Um die kritischen Punkte vom Index 0 von f_1 auf $M - \{p_1\}$ zu eliminieren, gehen wir folgendermaßen vor. Wir betrachten die Funktion $-f_1$ auf der zusammenhängenden Mannigfaltigkeit $M - \{p_1\}$. In $p_1 \in P$ habe $-f_1$ einen

Index $\lambda_1 = n$. Auf $-f_1$ können wir die Konstruktion nach Satz 6 anwenden und erhalten eine Funktion $-f'_1$, für die Satz 6 gilt. (- Die Bedingung $-f_1, -f'_1 \in F_{M-\{p_1\}}$ gilt natürlich nicht, wird hier aber auch nicht benötigt -). Da man lokal bei den so durchgeführten Abänderungen von $-f_1$ höchstens endlich viele Abänderungen von $-f_1$ vorzunehmen hat, erhält man eine Funktion $-f'$ auf M , die auf $M - \{p_1\}$ keinen kritischen Punkt vom Index n hat. - Die einzige Abänderung bei der Anwendung von Satz 6 auf $-f_1$ müssen wir bei dem Beweis zu Satz 6 nur bei HS 4 vornehmen. Da in einer Umgebung von p_1 die Mengen I_1 und $\overset{\circ}{M}(p_1)$ disjunkte Teilmengen von M sind und M zusammenhängend ist, muß es einen kritischen Punkt p_j von f_1 geben, so daß $p_j \in \bar{B}_1$ mit $B_1 = \{p \in M | \varphi(p) \cap I_1 \neq \emptyset\}$ und $\bar{B}_1$ enthält keine n -dimensionale Umgebung^{von} p_j .

§ 5) Aufhebung eines Paares kritischer Punkte.

Sei $X \in \mathcal{E}$. Es gebe in K_X Zellen E_1^i und E_j^j , so daß $\bar{E}_j^j \subset \text{Rd } E_1^i$ ist, daß $\lambda_1 = \lambda_j + 1$ ist und in einer Umgebung von p_j die Menge $\bar{E}_1^i$ eine λ_1 -dimensionale Halbumgebung (S. 35) von p_j in M ist. Dann ist in K_X die Menge $\bar{E}_1^i$ auf $\text{Rd } E_1^i - E_j^j$ deformierbar. (1). Der so als Deformationsretrakt von K_X bestimmte CW-Komplex $K' = K_X - (E_1^i \cup E_j^j)$ ist eine Teilmenge von M . Wir fragen, ob auch K' schwacher Deformationsretrakt von M ist. (2) (s. Def. 6 unten). (2) Bezüglich der schwachen Deformation von M auf K_X wären dann die Zellen E_1^i und E_j^j überflüssig, da M auch auf K'

schwach deformierbar ist.

Wir versuchen im folgenden die Punkte aus P , für die (1) gilt im Sinne von (2) aufzuheben.

Definition 5: Sei $X \in \mathcal{L}$ und $p_i \in P$. Wir nennen die Menge $\bar{E}_i^1$ nicht geschlossen, wenn es einen Punkt $p_j \in P$ mit $\lambda_j + 1 = \lambda_i$ und mit $p_j \in \bar{E}_i^1$ gibt und eine Stromlinie $\chi(p_0) \subset E_i^1$, $p_0 \in M$, so daß $I_j \cap E_i^1 \subset \chi(p_0)$ ist.

Sei nun $\bar{E}_i^1$ nicht geschlossen im Sinne von Definition 5. Für die späteren Beweise ist es nützlich, die folgende Aussage über den Durchschnitt einer Umgebung U_{ij} von p_j (nach Def. 5) mit $\bar{E}_i^1$ zu haben. Wir wollen zeigen, daß für eine geeignete Umgebung U_{ij} von p_j und lokale Koordinaten v in U_{ij} gilt $\bar{E}_i^1 \cap U_{ij} = \{v \in U_{ij} \mid v_{\lambda_i} = \dots = v_{n-1} = 0, v_n \leq 0\}$; dabei gelte $f(v) = -\sum_{k=1}^j v_k^2 + \sum_{k=j+1}^n v_k^2 + f(p_j)$. (3)

Um das zeigen zu können, benötigen wir zwei geeignete Vektorfelder in einer Umgebung U von $p_0 \in I_j - I_j = \text{Rd } I_j$. Wir können annehmen, daß in U und in lokalen Koordinaten x in U ($0 \rightarrow p_0$) das Vektorfeld $X = \Delta f$ gegeben ist durch $\Delta f = \frac{\partial}{\partial x_n}$; ferner, daß $f(p_0) = 0$ und $\text{Rd } I_j \cap \{p \in U \mid f(p) = 0\} = \{(0, \dots, 0, x_{\lambda_j+1}, \dots, x_{n-1}, 0)\}$ ist. Sei $\epsilon > 0$. Auf $\{p \in U \mid f(p) = 3\epsilon\} = D$ wird E_i^1 in geeigneten lokalen Koordinaten y in D aufgespannt von den Koordinaten $y_1, \dots, y_{\lambda_i-1}$. Seien $z'_1, \dots, z'_{n-1}$ die durch $\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{n-1}}$ bestimmten Geraden durch $(0, \dots, 0, 3\epsilon) \in U$. Es ist $\chi(p_0) \cap U = \{(0, \dots, 0, x_n) \in U\} =: c_n$. Sei $D' = \{p \in U \mid f(p) = 2\epsilon\}$. Sei π_a die Projektion von D längs der x_n -Kurven in δM^a , $\pi_a: D \rightarrow \delta M^a \cap U$ für $0 \leq a \leq 3\epsilon$. Wir projizieren die

Geraden $z'_1, \dots, z'_{n-1}$ längs der x_n -Kurven in D' .

$z_1 = \pi_{2\varepsilon}(z'_1), \dots, z_{n-1} = \pi_{2\varepsilon}(z'_{n-1})$ seien die Bildgeraden durch $(0, \dots, 0, 2\varepsilon)$. Dann gilt :

Hilfssatz 9: Es gibt ein Vektorfeld X_1 auf M , so daß

1) $X_1 \equiv \Delta f$ außerhalb einer Umgebung Z von $c_n \cap M^{2\varepsilon, 3\varepsilon}$ mit $Z \cap M^E = \emptyset$ ist ;

2) $(\Delta f(p), X_1(p)) > 0$ für $p \in U \cap M^{2\varepsilon, 3\varepsilon}$;

3) seien χ_1 die Stromlinien von X_1 in U , so ist für eine Umgebung Z' von c_n in M mit $Z' \subset\subset Z$

$\{x \in Z' \mid \chi_1(x) \cap D \cap E_1^+ \neq \emptyset\} \cap D' = Z' \cap \{(z_1, \dots, z_{\lambda_1-1}, 0, \dots, 0) \in D'\} =: E'$,
wenn wir in D' die Geraden $z_1, \dots, z_{n-1}$ als lokale Koordinaten wählen.

Beweis: Wir können in D die durch $\frac{\delta}{\delta y_1}, \dots, \frac{\delta}{\delta y_{n-1}}$ bestimmten Geraden $z'_1, \dots, z'_{n-1}$ als lokale Koordinaten wählen.

Dann gilt mit $q_0 = (0, \dots, 0, 3\varepsilon)$: $\frac{\delta z'_k}{\delta y_k}(q_0) > 0$, (1)

$k = 1, \dots, n-1$, wenn wir die Parametrisierung der Geraden z'_k geeignet wählen. Die Parametrisierungen t seien außerdem auf den Kurven $y_1, \dots, y_{n-1}$ und $z'_1, \dots, z'_{n-1}$ proportional zur Bogenlänge gewählt. Die Zuordnung $h_k: y_k(t) \rightarrow z'_k(t)$ ist dann wegen (1) eineindeutig und C^∞ in einer Umgebung von q_0 . Sei $h'(y) = (h_1(y_1), \dots, h_{n-1}(y_{n-1}))$. Sei $0 \leq c \leq 1$ und $h(y) = (1-c) \cdot y + c \cdot h'(y)$. Dabei sei allgemein für $\pi_a(y)$, $0 \leq a \leq 3\varepsilon$, und für $d \in \mathbb{R}$ definiert:
 $d \cdot \pi_a(y) = (d \cdot \pi_a(y_1), \dots, d \cdot \pi_a(y_{n-1}))$ in den lokalen Koordinaten $\pi_a(y_1), \dots, \pi_a(y_{n-1})$ in $\delta M^a \cap U$. h ist eine eineindeutige Abbildung von D auf sich. (2). Denn (2) ist $y = y'$, so ist $h'(y) = h'(y')$ und $h(y) = h(y')$. Ist $y \neq y'$, so ist ein $y_k \neq y'_k$ und ohne Einschränkung $y_k < y'_k$.

Wegen (1) ist dann $h_k(y) < h_k(y')$, also

$h_k((1-c)y) + c \cdot h_k(y) < h_k((1-c)y') + c \cdot h_k(y')$ und damit

$h(y) \neq h(y')$. Sei $g(x) = g_{2\epsilon, 3\epsilon, x_n}(x)$. Wir wählen in

$U \cap M^{2\epsilon, 3\epsilon}$ die Kurvenschar χ'_1 , die bestimmt ist durch

$\chi'_1(y) = \{x = (1-g(\pi_a(y)) \cdot \pi_a(y) + g(\pi_a(y)) \cdot \pi_a(h'(y))) \mid$

$2\epsilon \leq a \leq 3\epsilon\}$ für $y \in D$. Wegen (2) sind die Kurven χ'_1

punktfremd und $\chi'_1(y)$ verbindet $y \in D$ mit $\pi_{2\epsilon}(h'(y)) \in D'$.

Damit haben wir für χ'_1 in geeignetem Z die Eigenschaft

3) erfüllt, denn es gilt für $y = (y_1, \dots, y_{\lambda_1-1}, 0, \dots, 0) \in$

$E'_1 \cap D$, daß $h'(y) = (z'_1, \dots, z'_{\lambda_1-1}, 0, \dots, 0)$ ist und damit

$\pi_{2\epsilon}(h'(y)) \in E'$ ist. Wegen (2) gilt in 3) die Gleich-

heit. Die Kurven $\chi'_1(y)$ können wir durch die Stromlinien

ϕ von Δf auf $U - M^{2\epsilon, 3\epsilon}$ zu einer Kurvenschar χ' auf U

fortsetzen, die auf U ein Vektorfeld X'_1 definiert, für

das 2) gilt.

Sei $Z' \subset Z$ eine Umgebung von $c_n \cap M^{2\epsilon, 3\epsilon}$, so daß in

$(Z-Z') \cap (M-M^{2\epsilon, 3\epsilon})$ gilt $\Delta f \equiv X'_1$, und sei $g(x)$ eine

Trennungsfunktion von $\overline{Z'}$ und $M-Z$. Sei $X_1 = g(x) \cdot \Delta f +$

$+ (1-g(x))X'_1$. Da $(\Delta f, X'_1) > 0$ ist, erfüllt X_1 die Be-

hauptung des Hilfssatzes.

Seien die Geraden $z'_1, \dots, z'_{n-1}$ wie oben gewählt und

$D'' = \{x \in U \mid x_n = 0\}$. Ohne Einschränkung bilden die

Geraden $z'_1, \dots, z'_{n-1}$ ein orthogonales Koordinatensystem.

Hilfssatz 10: Es gibt ein Vektorfeld X_2 auf M , so daß

1) $X_2 \equiv \Delta f$ außerhalb einer Umgebung Z^+ von $c_n \cap M^{0, \epsilon}$

mit $\overline{Z^+} \cap \overline{Z} = \emptyset$ ist ;

2) $(\Delta f(p), X_2(p)) > 0$ für $p \in U$;

3) seien χ_2 die Stromlinien von X_2 in U , so ist für eine Umgebung Z^* von c_n in M mit $Z^* \subset Z^+$ und mit $E^+ := \overline{\Pi}_\varepsilon \circ \overline{\Pi}_{2\varepsilon}^{-1}(E')$ $\{x \in Z^* \mid \chi_2(x) \cap E^+ \neq \emptyset\} \cap D' = Z^* \cap \{(x_1, \dots, x_{\lambda_1-1}, 0, \dots, 0) \in D'\}$.

Beweis: Seien $g_1, \dots, g_{n-1}$ beziehentlich die Bildgeraden von $z'_1, \dots, z'_{n-1}$ unter der Abbildung $\Pi_0 : D \rightarrow D'$. Die Geraden $g_1, \dots, g_{n-1}$ bilden in einer Umgebung von $0 \in D'$ ein orthogonales Koordinatensystem $(w_1, \dots, w_{n-1}) = w$. Wir wählen die Parametrisierung der Kurven g_i geeignet und orientieren gegebenenfalls w_{n-1} anders, damit die folgenden Aussagen gelten. Es gibt eine orthogonale $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix V mit Determinante +1, so daß $w = V\varphi$ mit

$$\varphi = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{pmatrix}$$

ist. Da V endliches Produkt von Matrizen V' der Form

$$V' = (a_{ik}) \text{ mit } a_{ik} = \delta_{ik} \text{ für } (1):(i,k) \neq \left\{ \begin{pmatrix} (i_0, k_0), (k_0, i_0) \\ (i_0, i_0), (k_0, k_0) \end{pmatrix} \right\},$$

$$i_0 \neq k_0, \quad (1)$$

$$a_{i_0 i_0} = a_{k_0 k_0} = \cos \varphi; \quad a_{i_0 k_0} = -a_{k_0 i_0} = \sin \varphi; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$$

ist, gibt es eine Schar orthogonaler Matrizen $V(t)$,

$0 \leq t \leq 1$, die C^∞ vom Parameter t abhängt, so daß

$V(0) = 1$ und $V(1) = V$ ist. Es genügt, $V'(t)$ zu definieren.

Sei $V'(t) = (a_{ik}(t))$, $a_{ik}(t) = \delta_{ik}$ für $(i,k) \neq (1)$,

$$a_{i_0 i_0}(t) = a_{k_0 k_0}(t) = \cos(t\varphi);$$

$a_{i_0 k_0}(t) = -a_{k_0 i_0}(t) = \sin(t\eta)$. Sei $t = 1 - g_{0,\varepsilon,x_n}(x)$ und $\omega(t) = V(t)\omega$ für $x_n = \text{konstant}$. $\omega(t)$ können wir als lokale Koordinaten in $\delta M^{\varepsilon \cdot t} \cap U$ wählen. Jedem Punkt $z^* = (z_1^*, \dots, z_{n-1}^*) = (w_1(1), \dots, w_{n-1}(1)) \in D'$ ist dadurch eindeutig eine Kurve $\chi_2'(z^*) = \{w_1(t), \dots, w_{n-1}(t)\} \in \delta M^{\varepsilon \cdot t} \cap U \mid 0 \leq t \leq 1$ in $M^{0,\varepsilon} \cap U$ zugeordnet. Da für ein durch die Kurven $\chi_2'(z^*)$ erzeugtes Vektorfeld X_2' gilt $(X_2', df) > 0$, können wir wie oben im Beweis des HS 9 schließen und erhalten ein Vektorfeld X_2 , für das 1), 2) und 3) gilt.

Da man die lokalen Koordinaten $x_1, \dots, x_{n-1}$ in U so wählen kann, daß die Projektionen von lokalen Koordinaten $v = (v_1, \dots, v_n)$ in einer Umgebung U_j von p_j längs der Parallelen zur Geraden v_n auf $\{p \in U_j \mid f(p) = f(p_0)\}$ sind, und da dann die Stromlinien aus E_1' gerade die Teilmenge $\{v \in U_{ij} \mid v_{\lambda_1} = \dots = v_{n-1} = 0, v_n < 0\}$ ausfüllen, gilt (3) von S. 45.

Satz 2 gilt für X, χ, E_1' anstelle von df, φ, E_1 . V'^C sei die nach Satz 2 zu K_X^C (s. Def. 2', S. 33) existierende Umgebung V^C in M und X'^C das nach Satz 2 auf V'^C existierende Vektorfeld X^C . Wir wollen in einer Umgebung V_0 von K_X^C in M mit $\overline{V_0} \subset V'^C$ das Vektorfeld X'^C abändern. Und zwar wollen wir das so machen, daß wir in einer geeigneten Umgebung V'_{ij} von E_1' für jede nichtgeschlossene Teilmenge $\overline{E_1'}$ das Vektorfeld X^C so abändern, daß in V'_{ij} das neue Vektorfeld Y^C ungleich 0 wird. Y^C wird für unsere Konstruktion eines einfacheren schwachen Deformationsretrakts von M geeignet sein. (1)

Um Satz 6 auf $\overline{E}_i^1$ anwenden zu können, müssen wir noch eine λ_i -dimensionale Halbumgebung B_j von p_j (p_j nach Def. 5) zu $\overline{E}_i^1$ hinzunehmen, so daß $B_j \cup E_i^1$ zu einer Mannigfaltigkeit wird (HS 12). p_i und p_j sind dann innere Punkte von $E_i^1 \cup B_j$ und wir können die Konstruktion von Satz 6 in Z_i ausführen, falls f auf E_i^1 definiert ist. Da wir Δf jedoch zu dem Vektorfeld $X \in \mathcal{L}$ abgeändert haben, braucht f nicht auf E_i^1 definiert zu sein. Sei $A \subset E_i^1$ die Teilmenge in E_i^1 , auf der $\Delta f = X$ ist. Wir wollen zuerst $f|_A$ zu einer auf E_i^1 definierten Funktion ergänzen.

Bei den folgenden Hilfssätzen zitieren wir der bequemeren Sprechweise wegen nur Satz 1 und 2, falls wir die entsprechenden Aussagen für das Vektorfeld X , den Fluß χ von X und für K_X anstelle von Δf , φ und K benötigen (s.S. 33).

Sei $\varepsilon > 0$ eine nahe bei 0 liegende Konstante.

Hilfssatz 11: Es gibt eine Funktion $f_i^* \in D_{E_i^1}$, so daß $f_i^*|_{A'} = f|_{A'}$ ist, wobei $A' \subset A$ und $\text{dist}(A', \delta A) < \varepsilon$ ist.

Beweis: Da f jeweils nur in den Teilmengen B_{p_l} (s. Def. 3) nicht definiert ist, brauchen wir in diesen disjunkten Teilmengen von E_i^1 die Ergänzung von f zu f_i^* vorzunehmen. Das machen wir folgendermaßen. Sei für ein B_{p_k} der Durchschnitt $B_{p_k} \cap E_i^1 \neq \emptyset$. Für geeignete Konstanten a, b mit $0 < a < b$ ist außerhalb $M^{f(p_k)-b, f(p_k)-a} = C$ das Vektorfeld Δf ungeändert. Sei $B = E_i^1 \cap \delta M^{f(p_k)-b}$. Wir parametrisieren die Stomlinien χ von X in $E_i^1 \cap C$ von B aus proportional zur Länge von $\chi(p) \cap E_i^1 \cap C$. Der Parameterwert liefert eine C^∞ -Funktion in $E_i^1 \cap C$, die wir nach

Multiplikation mit einer geeigneten Konstanten und Addition einer Konstanten C^∞ an die Funktion $f|_A$ anschließen können. Wir erhalten dann, wenn wir diese Abänderung, falls nötig, für jedes k mit $B_{p_k} \cap E'_1 \neq \emptyset$ durchgeführt haben, eine Funktion f_1^* mit den verlangten Eigenschaften.

Hilfssatz 12: Ist $\overline{E'_1}$ nicht geschlossen, so gibt es zu dem nach Definition 5 existierenden kritischen Punkt $p_j \in P$ eine λ_1 -dimensionale Halbumgebung B_j von p_j , so daß $E'_1 \cup B_j$ eine Mannigfaltigkeit ist.

Beweis: Sei p_j der kritische Punkt nach Definition 5. Wir betrachten für eine Umgebung U_j von p_j in M die Menge $A_1 = \overline{E'_1} \cap U_j$. Für genügend klein gewähltes U_j können wir wegen Hilfssatz 9 und 10 die lokalen Koordinaten x in U_j so wählen, daß $A_1 = \{(x_1, \dots, x_{\lambda_j}, 0, \dots, 0, x_n) | x_n \leq 0\}$ und $s_j = \{(x_1, \dots, x_{\lambda_j}, 0, \dots, 0, 0)\}$ ist. Wir wählen $B_j = \{(x_1, \dots, x_{\lambda_j}, 0, \dots, 0, x_n) | x_n \geq 0\}$.

Den nächsten wichtigen Schritt, die Abänderung von X^C in einer Umgebung der nichtgeschlossenen Mengen $\overline{E'_1}$, so daß das neue Vektorfeld X_{1j} dort ungleich 0 wird, machen wir in Satz 7. In Hilfssatz 13, 14, 15 konstruieren wir Hilfsfunktionen, die wir beim Beweis zu Satz 7 benötigen.

Seien die Umgebungen V'_k von E'_k wie in Satz 2 gewählt. Da für X Lemma 1 gilt, ist ohne Einschränkung $V'_k \cap V'_1 = \emptyset$, falls $E'_k \not\subset \overline{E'_1}$ mit $1 \geq l > k$ ist. (A). Sei V' eine geeignete Umgebung von $\overline{E'_1}$. (*) sei die Menge der k mit $E'_k \subset \overline{E'_1}$ für festes i . (A) (*)

Hilfssatz 13: Es gibt ein Vektorfeld Y_1 auf V' , so daß $Y_1(p) = 0$ für $p \in \overline{E'_1}$, daß $Y_1(p) \neq 0$ für $p \in V' - \overline{E'_1}$ ist und V' längs der Stromlinien von Y_1 auf $\overline{E'_1}$ deformierbar ist.

Beweis: Wegen (A) geht der Beweis analog wie der Beweis zu Satz 2 mit $i = r$. Für k und l nimmt man nur die Zahlen aus (*). Es sei $U'_1 = V'$.

Im folgenden sei $\overline{E'_1}$ nicht geschlossen. Sei B_j bzw. f_i^x wie in HS 12 bzw. 11 zu $\overline{E'_1}$ konstruiert.

Hilfssatz 14: Es gibt eine Funktion $g_i^x \in D_{E'_1 \cup B_j}$ mit folgenden Eigenschaften: g_i^x und f_i^x haben außerhalb einer Umgebung V von $\chi(p_0)$ (Def. 5) dieselben Niveaulächen. Es gilt $\Delta g_i^x(p) \neq 0$ in $V \cap (E'_1 \cup B_j)$.

Beweis: Wir können Satz 6 anwenden, da wir die Abänderung der Funktionswerte f_i^x nach HS 7 vornehmen können und dann die Abänderung von f_i^x in V nach Satz 6 vorgenommen werden kann. (Die Hilfssätze 4, 5, 6 entfallen.)

Seien V'_1, V'_j wie in Satz 1 gewählt und $V_{ij} := V'_1 \cup V'_j$. Sei Y_1 bzw. g_i^x wie in HS 13 bzw. 14. Sei $A_{ij} = E'_1 \cup E'_j$. Sei $C_1 = \text{Rd } E'_1 - E'_j$ und W_1 bzw. V'_{ij} eine geeignet gewählte Umgebung von C_1 bzw. A_{ij} . Sei d eine nahe bei $f(p_j)$ liegende Konstante und $\epsilon > 0$, so daß $d < d+\epsilon < f(p_j)$ ist.

Hilfssatz 15: Es gibt ein Vektorfeld Y_1^+ auf V'_{ij} , so daß

- 1) $Y_1^+|_{A_{ij} \cap (M - M^{d+\epsilon})} = \Delta g_i^x$ und $Y_1^+ \equiv X$ auf $M^d \cap V'_{ij}$,
- 2) $Y_1^+(p) \neq 0$ in V'_{ij} ist.
- 3) In V'_{ij} gilt $(Y_1^+(p), Y_1(p)) \geq 0$ oder für alle $c \in \mathbb{R}$ $Y_1^+(p) \neq c \cdot Y_1(p)$.

Beweis: Sei U_j eine Umgebung von p_j . Wir definieren

zuerst eine Funktion h_{ij} in $V_{ij} \cap (M - \bar{M}^d) - U_j = E$.

Sei $\Psi(p) = \{p\}$ für $p \in E'_1 \cap E$. Für $p \in E - E'_1$ seien

$\Psi(p)$ die Stromlinien von Δh_i . Sei $h_{ij}(p) = g_i^*(q)$ mit

$\overline{\Psi(p) \cap (E'_1 - U_j)} = q$ für $p \in E$. Da h_{ij} konstant ist

längs der Stromlinien von Ψ , ist $(\Delta h_{ij}, Y_1) = (\Delta h_{ij}, \Delta h_i) = 0$ auf E .

Wir definieren nun noch h_{ij} in U_j . Sei $\bar{h}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2$.

Es ist $(\Delta \bar{h}(p), \Delta h_i(p)) > 0$ für $\bar{h}(p) > 0$. Sei $g(p) =$

$= g_{\epsilon', 2\epsilon', h_j}(p)$, ($\epsilon' > 0$), und $X'(p) = (1-g(p)) \Delta h_i(p) +$
 $+ g(p) \Delta \bar{h}(p)$. Es ist $X'(p) \neq 0$ in $U_j - (E'_1 \cup B_j) = C$ und

$(\Delta h_j(p), \Delta \bar{h}(p)) > 0$ in C , also ohne Einschränkung

$(X'(p), Y_1(p)) = ((1-g(p)) \Delta h_i(p) + g(p) \Delta \bar{h}(p),$

$g'(p)(g_i^*(p) \Delta h_i(p) + (1-g_i^*(p)) \Delta h_j(p)) > 0$ in C . (g' und g_i^*

seien dabei wie in Satz 2 definiert.) Sei Ψ' der Fluß

von X' in C und $\Psi'(p) = \{p\}$ für $p \in (E'_1 \cup B_j) \cap U_j$. Wir

definieren $h_{ij}(p) = g_i^*(q)$ für $q = \overline{\Psi'(p) \cap (E'_1 \cup B_j)}$ und

$p \in U_j$. Wegen $(X'(p), Y_1(p)) = (X'(p), \Delta h_j(p)) \geq 0$ für

$p \in \{x \in U_j \mid x_n \geq 0\} =: D$ und $(\Delta h_{ij}(p), Y_1(p)) = (\Delta g_i^*(p), Y_1(p))$

≥ 0 für $p \in B_j$ (s. Beweis zu Satz 6) ist für $p \in D$:

$(\Delta h_{ij}(p), Y_1(p)) \geq 0$. In $\{x \in U_j \mid x_n < 0\} - E'_1 = C'$ zeigt

für kein x der Vektor $\Delta h_{ij}(x)$ in Richtung einer Stromlinie

von Y_1 , da dort $(X'(p), Y_1(p)) > 0$ ist und

$(\Delta h_{ij}(p), X'(p)) = 0$ ist. Auf A_{ij} ist $(\Delta h_{ij}(p), Y_1(p)) =$

$= (\Delta h_{ij}(p), 0) = 0$.

Auf $M^{d, d+\epsilon}$ ist ohne Einschränkung $X \equiv \Delta f$ und

$\Delta g_i^* = \Delta f|_{E'_1 \cup B_j}$. Da $\Delta h_{ij}(p) = \Delta g_i^*(p) \neq 0$ auf $A_{ij} \cap (M - M^d)$

(bzw. $(\Delta h_{ij}(p), X(p)) > 0$ auf $M^{d, d+\epsilon} \cap A_{ij}$) ist, gilt auch

in $(V'_{ij} - U_j) \cap (M - M^d)$ (bzw. $M^{d,d+\epsilon} \cap V'_{ij}$), daß $\Delta h_{ij}(p) \neq 0$ (bzw. $(\Delta h_{ij}(p), X(p)) > 0$) ist. Dabei sei $V'_{ij} \subset V_{ij}$ eine Umgebung von A_{ij} . Sei $g^+(p) = g_{d,d+\epsilon,f}(p)$ und $Y_i^+(p) = g^+(p)X(p) + (1-g^+(p))\Delta h_{ij}(p)$ in $(M - M^d) \cap V'_{ij} - U_j$ und $Y_i^+(p) = X(p)$ in $V'_{ij} \cap M^d$. Es ist $Y_i^+(p) \neq 0$ in V'_{ij} .

Satz 7: Es gibt ein Vektorfeld X_{ij} auf V' (s.HS 13), so daß

- 1) $(X_{ij}(p), X(p)) \geq 0$ außerhalb einer Umgebung von $\overline{E'_1}$ gilt,
- 2) $X_{ij}(p) \neq 0$ ist in V_{ij} und
- 3) V' längs der Stromlinien von X_{ij} auf $\text{Rd } E'_1 - E'_j$ deformierbar ist.

Beweis: Sei $g'(p) = 1 - (1-g_{\epsilon_1, 2\epsilon_1, h_1}(p))(1-g_{\epsilon_j, 2\epsilon_j, h_j}(p))$ in V_{ij} . Sei $X'_{ij}(p) = g'(p)Y_i^+(p) + (1-g'(p))Y_j(p)$ mit $p \in V_{ij}$. Der Beweis von HS 13 läßt sich übertragen auf C_1 und W_1 (S.52) anstelle von $\overline{E'_1}$ und V' . Y'_1 sei das Vektorfeld in W_1 , das wir auf diese Weise erhalten. Es gilt dann $(Y'_1, X) \geq 0$ auf W_1 . Sei $W'_1 \subset W_1$ eine Umgebung von C_1 in M und g eine Trennungsfunktion von W'_1 und $M-W_1$. Wir definieren $X_{ij}(p) = g(p)X'_{ij}(p) + (1-g(p))Y'_1(p)$. Wegen 2) und 3) von HS 15 und den Eigenschaften von Y'_1 gilt 1), 2) und 3) von Satz 7.

Wir benötigen noch eine weitere Eigenschaft des Vektorfeldes X_{ij} . Ist nämlich $\overline{E'_k} \cap A_{ij} \neq \emptyset$, so ist E'_k nicht mehr definiert. Um E'_k und V'_k (s.Satz 1) in V_{ij} neu zu definieren, benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

Sei V' wie in HS 13. Sei $g(p) = 1 - \prod_{h \in (*)} (1 - g_{\varepsilon_k, 2\varepsilon_k, h_k}(p))$
(s.S. 51).

Hilfssatz 16: Es gibt ein Vektorfeld X'_1 und eine Umgebung $W' \subset V'$ von $\overline{E'_1}$ in M , so daß $X'_1 \equiv X_{1,j}$ in W' , $X'_1 \equiv X$ in $M - V'$ ist und $X'_1(p) \neq 0$ in $V' - W'$ gilt.

Beweis: Die Funktion $1 - g$ ist eine Trennungsfunktion einer Umgebung W' von $\overline{E'_1}$ mit $W' \subset V'$ und $M - W'$ (bei geeigneter Wahl von W' und W''). Ohne Einschränkung gilt $\{p \in V' \mid (X_{1,j}(p), X(p)) < 0\} \subset W'$. Wir bilden $X'_1(p) = g(p)X_{1,j}(p) + (1-g(p))X(p)$. Für X'_1 gilt HS 16.
(s. (A), S. 51).

Wir definieren E'_k und V'_k in $V_{1,j}$ neu, falls $\overline{E'_1} \cap A_{1,j} \neq \emptyset$ und für das Paar p_1, p_j Def. 5 gilt. Seien χ_1 die Stromlinien von X'_1 . Wir setzen $E'^o_k := \{p \mid \chi_1(p) \cap e_k \neq \emptyset\}$ und $V^o_k = \{p \mid \chi_1(p) \cap V'_k \neq \emptyset\}$ (zur Definition von V'_k s. Satz 1). (B). Es ist $\text{Rd } E'^o_k \subset (\text{Rd } E'_1 - E'_j)$.

Wir wollen nun die Konstruktion des Vektorfeldes Y^c nach (1) S. 49 in Angriff nehmen.

Es sei $f \in F_M$. X sei nach Lemma 1 zu f bestimmt. Zu jedem $j \geq 1$ wählen wir, falls vorhanden, i minimal aus, so daß $\overline{E'_1}$ eine nichtgeschlossene Menge in M ist. (2)

Gibt es kein solches j , so sei $P_1 = \emptyset$. Gibt es ein j mit (2), so sei $j_1 \geq 2$ die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft und $i_1 = i$ nach (2) zu $j = j_1$ gewählt. Sei $P_1 = \{p_{j_1}, p_{i_1}\}$. Sei $P_k \subset P$ mit $k \geq 1$ schon definiert. Gibt es in $P - P_k$ kein j mit (2), so sei $P_{k+1} = P_k$, sonst wählen wir in $P - P_k$ den Punkt $p_{j_{k+1}}$ so aus, daß j_{k+1}

minimal ist und (2) für das Paar $j = j_{k+1}$, $i = i_{k+1}$ gilt. Sei $P_{k+1} = P_k \cup \{p_{i_{k+1}}, p_{j_{k+1}}\}$. Es sei $Q = P - \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$. Die Punkte von Q seien so numeriert, daß $Q = \{q_1, q_2, \dots\}$, $q_1 = p_{v_1} \in P$ und $1 = v_1 < v_2 < \dots$ ist.

Bemerkung 5: Ist $q_k \in Q$, so trifft die Umgebung V'_{v_k} (s. Satz 1) höchstens endlich viele Teilmengen V_{ij} , so daß $p_i, p_j \in P - Q$ sind. Die neuen Teilmengen $V'_{v_k} = W'_k$ bzw. E_k^0 seien aus den Teilmengen V'_{v_k} bzw. E'_{v_k} dadurch entstanden, daß in diesen endlich vielen V_{ij} die Abänderungen nach (B) ausgeführt wurden. Sei $L = \bigcup_{k=1,2,\dots} E_k^0$. Es gilt dann: $\overline{E_k^0} \subset L$.

Wir wollen nun Satz 1 und Satz 2 übertragen für die Teilmengen E_k^0 aus M .

Hilfssatz 17: Zu jedem $q_i \in Q$ gibt es eine Funktion $h'_i \in D_{W'_i}$, so daß $\Delta h'_i(p) = 0$ für $p \in E_i^0$ und $\Delta h'_i(p) \neq 0$ für $p \in W'_i - E_i^0$ ist.

Der Beweis ist klar.

Für $c \in \mathbb{R}$ kann für ein Paar $p_i, p_j \in P - Q$, für das Def. 5 gilt, gelten $p_j \in M^c$ und $p_i \notin M^c$. (C). In diesem Fall gilt nicht, daß $L^c := \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} E_k^0$ Deformationsretrakt von M^c ist. Wir müssen für jedes solche Paar i, j zu M^c eine Umgebung V'_i von E_i^0 zu M^c hinzunehmen. Für die Vereinigungsmenge D^c von M^c mit diesen Mengen V'_i gilt dann, daß L^c Deformationsretrakt von D^c ist. Wir definieren für $L = \bigcup_{k=1,2,\dots} E_k^0$ anstelle von K deswegen die schwache Deformation folgendermaßen.

Definition 6: L heißt schwacher Deformationsretrakt von M , wenn für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Menge $L^c = \bigcup_{h: q_k \in M^c \cap Q} E_k^0$ Deformationsretrakt von D^c ist.

Sei A die Vereinigungsmenge von L^c mit allen E_i^1, E_j^1 , für die (C) gilt. Sei V' eine Umgebung von A in M .

Satz 8: Es gibt ein Vektorfeld Y^c auf V' , so daß

- 1) $Y^c = 0$ für $p \in L^c$, $Y^c \neq 0$ für $p \in V' - L^c$ gilt.
- 2) Außerhalb einer Umgebung V von A in M ist $\langle Y^c, X \rangle \geq 0$.
- 3) V' ist längs der Stromlinien von Y^c auf L^c deformierbar.

Beweis: Wir können den Beweis von Satz 2 übernehmen mit folgenden Abänderungen. Ist $p_k \in \overline{E_i^1}$ für eine nichtgeschlossene Menge $\overline{E_i^1}$ mit $p_i \in D^c$, so ersetzen wir Δh_k durch X_{ij} , wobei i minimal zu k mit dieser Eigenschaft gewählt sei. Für die übrigen $q_k \in Q \cap M^c$ ersetzen wir im Beweis zu Satz 2 überall h_{v_k} durch h_k^1 und V'_{v_k} durch W_k^1 .

Wegen Satz 8 können wir die Konstruktion des Vektorfeldes X^* wie in Theorem 1 vornehmen. Wir erhalten so die Aussage von Theorem 1 mit L und E_k^0 anstelle von K_X und E_k^1 . Von den Teilmengen $\overline{E_k^0}$ wissen wir, daß keine eine nichtgeschlossene Menge in M ist.

Wir formulieren die Ergebnisse, die wir erhalten haben, noch einmal.

Theorem 2: Es gilt

- 1) L ist schwacher Deformationsretrakt von M .
- 2) Keine der Teilmengen $\overline{E_k^0} \subset L$ ist nichtgeschlossen.

§ 6. Anwendungen

a) Wir definieren : $\dim K = \max_{i=1,2,\dots} \lambda_i$. Wegen Satz 5 gilt:

Bemerkung 6: Sei M eine nichtkompakte, n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Es gibt Funktionen $f \in F_M$, so daß $\dim K \leq n - 1$ ist und f auf M nur einen kritischen Punkt vom Index 0 besitzt.

Ferner gilt

Satz 9: Sei M eine Steinsche Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension m . Dann gibt es auf M Funktionen $f \in F_M$, für die $\dim K \leq m$ ist. ([11], S. 39)

Beweis: Nach ([1]) gibt es Funktionen $f' \in D_M$, die nur nichtentartete kritische Punkte auf M haben und für die in den kritischen Punkten p_i von f' der Index $\lambda_i \leq m$ ist. Für f' gilt außerdem $M_f^c \subset M$ für jedes $c \in \mathbb{R}$. Nach [13], S. 353 kann man zu f' eine Funktion $f \in F_M$ konstruieren, für die Satz 9 gilt.

b) Es werden nun einige Aussagen über glattberandete Mannigfaltigkeiten (Definition 7) bewiesen. Streng pseudokonvexe Steinsche Mannigfaltigkeiten mit C^2 -Rand sind glattberandet. Wir wollen für glattberandete Mannigfaltigkeiten zeigen, daß für sie eine Teilmenge $K \subset M$ existiert, die Deformationsretrakt von M ist.

Definition 7: Eine nichtkompakte Mannigfaltigkeit M heißt glattberandet, wenn es eine außerhalb einer kompakten Teilmenge A von M definierte Funktion $g \in D_{M-A}$ gibt, so daß $\lim_{v \rightarrow \infty} g(q_v) = \infty$ für jede Folge $q_v \in M$, $v = 1, 2, \dots$, die in M keinen Häufungspunkt hat und wenn $\Delta g(p) \neq 0$ in $M-A$ ist.

Sei $N \subset M$ und $g \in D_N$. Mit N_g^a , $a \in \mathbb{R}$, bezeichnen wir die Teilmenge $N_g^a = \{p \in N \mid g(p) \leq a\}$. } (A)

Eine Motivierung der Definition 7 gibt der folgende Satz.

Satz 10: Sei M glattberandet. Dann kann M so kompaktifiziert werden, daß δM , die Menge der Randpunkte von M eine $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit bildet.

Beweis: Wir zeigen, daß wir M diffeomorph auf eine Teilmenge B von M abbilden können, deren Rand in M eine $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist. (1)

Sei A nach Definition 7 gewählt. Die Teilmenge C von M sei so gewählt, daß $A \subset C \subset M$ ist. Da C kompakt ist in M , ist $g(p) \leq d'$ auf ∂C für ein $d' \in \mathbb{R}$. Sei $e \in \mathbb{R}$ und $e > d'$. Dann ist $C \subset U_g^e \cup C$, wenn wir $U = M - C$ definieren. Seien $a, b > e$ und $a < b$. Sei $B_d := \{p \in M - C \mid g(p) = d\}$ für $d \in \mathbb{R}$. Seien $\psi(p)$ die Stromlinien von g in $D = M - U_g^e \cup C$. Wir parametrisieren die Stromlinien von ψ von $p \in B_a$ aus in Richtung B_b und proportional zur Länge von $\psi(p)$ zwischen $\psi(p) \cap B_a$ und $\psi(p) \cap B_b$. Sei $g'(q) = 1 - g_{a,c,g}(q)$ mit $c = \frac{a+b}{2}$ für $q \in D$ und $h(q) = h(\psi_r(p)) := \psi_t(p)$ mit $t = \frac{r}{1 - g'(\psi_r(p))}$ für $p \in B_a$ und $0 \leq r < 1$. (2)

Für $q \in C \cup U_g^a$ sei $h(q) = q$, d.h. für $q \notin C \cup U_g^e$ ist $h(q) = h(\psi_t(p)) = \psi_t(p)$ für ein $t \leq 0$ und ein $p \in B_a$. t schließt für $r = 0$ differenzierbar an die Funktion r an, für $r = \frac{1}{2}$ an $\frac{r}{-r+1}$. h ist eineindeutig und umkehrbar und liefert einen Diffeomorphismus von M auf $B := U_g^b \cup C$. (3)

Die Eindeutigkeit von h folgt so. Wir definieren $g''(\psi_t(p)) := g'(\psi_r(p))$ für $p \in B_a$ und t nach (2). Ist $r < r'$, so ist $c := g'(\psi_r(p)) \leq g'(\psi_{r'}(p)) =: c'$, also $-rr'c' \leq -rr'c$ und $0 < r - rr'c' < r' - rr'c$, $\frac{r}{1-rc} < \frac{r'}{1-r'c'}$, also h eineindeutig und g'' wohldefiniert. Es ist $r = \frac{t}{1+g''(\psi_t(p))t}$ eine differenzierbare Funktion von (t,p) . Somit gilt (3).

Bemerkung 7: Streng pseudokonvexe Steinsche Mannigfaltigkeiten mit C^2 -Rand sind glattberandet.

Beweis: Nach ([6]) gibt es in einer Umgebung U des Randes von M eine Funktion $f \in D_U$, die dort streng plurisubharmonisch ist und für die $M \cap U = \{p \in M \mid f(p) < 0\}$ ist. Für eine etwas kleinere Umgebung U' des Randes von M ist $\Delta f(p) \neq 0$ in $M \cap U'$, (s. [4], S. 263). Sei $g(p) = -\log|f(p)|$. In U' ist $\Delta g(p) \neq 0$ und es ist $g \in D_{M-A}$ mit $A = M - \bar{U}'$.

Sei $h: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Einbettung, so daß $h(M)$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^k$ ist. Sei $x \in \mathbb{R}^k$ fest und $L_x(p) := |p-x|^2$, das Quadrat des euklidischen Abstandes zwischen p und x , für $p \in M$. Es ist $L_x \in D_{h(M)}$. Es gelten die folgenden Sätze (s. [11], S. 36f.):

Satz 11: Für fast alle $x \in \mathbb{R}^k$, (alle, bis auf eine Menge vom Maße Null), hat die Funktion L_x nur nichtentartete kritische Punkte.

Wir identifizieren M mit seinem Bild unter h . F'_M sei die Menge der Funktionen f' auf M , für die es Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $a \cdot f' + b \equiv L_x$ ist für ein $x \in \mathbb{R}^k$.

Satz 12: Sei $g' \in D_M$. Sei M_g^c , $c \in M$ für jedes $c \in \mathbb{R}$.
 (s.(A), S.59) Es gebe ein $d \in \mathbb{R}$ mit $g'(p) \geq d$ für alle
 $p \in M$. Dann kann g' gleichmäßig approximiert werden durch
 eine Funktion $f' \in D_M$, die nur nicht entartete kritische
 Punkte hat. Sei $K \subset M$ eine kompakte Menge. Dann kann f'
 so gewählt werden, daß die i -ten Ableitungen von f' auf der
 kompakten Menge K gleichmäßig die entsprechenden Ableitungen
 von g' für $i \leq n$ approximieren.

Die Funktion f' von Satz 12 ist aus F'_M .

Um Satz 13 und 14 zu zeigen, benötigen wir das folgende
 Lemma. Sei g nach Definition 7. gewählt. Sei $A \subset C \subset M$.
 Da C kompakt in M ist, ist $g(p) \leq d'$ auf δC für ein $d' \in \mathbb{R}$.
 Sei $U = M - C$ und $e > d'$.

Lemma 2: Sei M glattberandet. Dann gibt es eine Funktion
 $g^* \in D_M$ mit folgenden Eigenschaften:

- 1) $M_{g^*}^c \subset M$ für jedes $c \in \mathbb{R}$;
- 2) es gibt ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a > e$, so daß g^* auf $U_g^a \cup C$
 (s.(A), S.59) mit einer Funktion $f' \in F'_M$ übereinstimmt;
- 3) es ist $\Delta g^*(p) \neq 0$ für $p \in M - (U_g^a \cup C)$.

Beweis: Seien $a, a' \in \mathbb{R}$ nahe beieinanderliegende Werte
 mit $a > a' \geq e$. Sei $g_1(p) := g_{a', a, g}(p)$ für $p \in M - (U_g^e \cup C)$
 und $g^+(p) := (1 - g_1(p))g(p) + g_1(p)a'$. Für $p \in U_g^e \cup C$ sei
 $g^+(p) := a'$. Es ist $g_{\Delta g}^+(p) = (1 - g_1(p))g_{\Delta g}(p) +$
 $+ (a' - g(p))g_{1\Delta g}(p) > 0$ falls $0 < g_1(p) < 1$ ist und es ist
 $g^+ \in D_M$. Zu g^+ gibt es eine Funktion $f' \in F'_M$, so daß
 Satz 12 für g^+ anstelle von g' und für f' gilt. Sei $b \in \mathbb{R}$

und $b > a$. Für f' gilt: $f'(p) < d$ für alle $p \in M_{g^+}^b$ (s.(A), S.59) und geeignetes $d \in \mathbb{R}$. Für $p \in M - (U_g^e \cup C)$ sei $g_2(p) := g_{a,b,g}(p)$. Auf $E := \{p \in M \mid a \leq g(p) \leq b\}$ ist $g = g^+$ und $(\Delta g^+(p), \Delta g^+(p)) \geq c' > 0$. Aus Satz 12 folgt, daß bei geeigneter Wahl von f' das innere Produkt $(\Delta g^+(p), \Delta f'(p)) > 0$ auf E ist. Sei für $p \in M - (U_g^e \cup C)$ $g^*(p) := (1 - g_2(p))(g^+(p) + d - a) + g_2(p)f'(p)$ und $g^*(p) = f'(p)$ für $p \in U_g^e \cup C$. Für $0 < g_2(p) < 1$ ist $g_{\Delta g}^*(p) = (1 - g_2(p))g_{\Delta g}^+(p) + g_2(p)f'_{\Delta g}(p) + (-g^+(p) - d + a + f'(p))g_{2\Delta g}(p) > 0$.

g^* erfüllt alle Bedingungen von Lemma 2.

Satz 13: Sei M glattberandet. Dann gibt es eine Funktion $f \in F_M$, die auf M nur eine endliche Anzahl kritischer Punkte hat. K ist Deformationsretrakt von M .

Beweis: Sei $g^* \in D_M$ nach Lemma 2 konstruiert. g^* hat auf M nur nicht entartete kritische Punkte, ihre Anzahl r ist also endlich. Nach [13], (S.353), gibt es eine streng nicht entartete Funktion $f \in F_M$, die als kritische Punkte $p_1, \dots, p_r$ genau die kritischen Punkte von g^* auf M hat und die so beschaffen ist, daß der Index von f in p_i gleich dem Index von g^* in p_i ist für $i = 1, \dots, r$. Aus dem Zusatz zu Theorem 1 folgt, daß K Deformationsretrakt von M ist.

Satz 14: Sei M eine streng pseudokonvexe Steinsche Mannigfaltigkeit mit C^2 -Rand und mit der komplexen Dimension m . Dann gibt es eine Funktion $f \in F_M$, die auf M nur eine endliche Anzahl kritischer Punkte hat und für

die $\dim K \leq m$ ist. K ist Deformationsretrakt von M .

Beweis: Sei $g^* \in D_M$ nach Lemma 2 konstruiert. Nach [1] gilt für jede Funktion $f' \in F'_M$, daß der Index λ von f' in $p \in M$ kleiner gleich m ist, falls $\Delta f'(p) = 0$ ist. Sei f zu g^* wie in Satz 13 bestimmt. Wegen 2) und 3) von Lemma 2 und der speziellen Wahl von f gilt Satz 14.

c) Sei $m < n$. $H_m(M)$ seien die ganzzahligen, singulären Homologiegruppen von M . $\pi_m(M)$ seien die Homotopiegruppen von M . Δ^m sei das m -dimensionale Standard-simplex, φ , eine stetige Abbildung von Δ^m in M . ([5]) Δ_*^m sei der m -dimensionale Einheitswürfel und φ_* eine stetige Abbildung von Δ_*^m in M , die den Rand von Δ_*^m auf p_1 abbildet. ([14]) Sei $\sigma = (\Delta^m, \varphi, \varphi(\Delta^m))$ ein singuläres, m -dimensionales Simplex. σ ist ein Element einer Klasse von $H_m(M)$. Mit $\bar{\sigma}$ bzw. $\bar{\varphi}_*$ bezeichnen wir die Klasse von σ in $H_m(M)$ bzw. die Klasse von φ_* in $\pi_m(M)$. Wir wollen nun ein Ergebnis ableiten über die Mengen $\varphi(\Delta^m)$ und $\varphi_*(\Delta_*^m)$, wenn wir φ , und φ_* geeignet wählen. (Theorem 3).

Da $\varphi(\Delta^m)$ kompakt in M ist, ist $\varphi(\Delta^m) \subset M^c$ für ein geeignetes $c \in \mathbb{R}$. Sei h die Deformationsabbildung von D^c auf L^c nach Theorem 2. Sei $h_t := h|_{D^c \times t}$. Es ist $\sigma' = (\Delta^m, \varphi' = h_1 \circ \varphi, \varphi'(\Delta^m)) \in \bar{\sigma}$. Da $h_1(D^c) = L^c$ ist, ist $\varphi'(\Delta^m) \subset L^c$. Wir können dann voraussetzen, daß $\alpha) \varphi'(\Delta^m) \subset (L^c)^m$ ist, wobei $(L^c)^m$ das m -dimensionale Gerüst von L^c ist. Ferner gelte $\beta) \text{ ist } E_1^0 \cap \varphi'(\Delta^m) \neq \emptyset$, so ist $E_1^0 \subset \varphi'(\Delta^m)$.

Wäre $E_1^0 \not\subset \varphi'(\Delta^m)$, so gäbe es einen Punkt $p \in E_1^0 - \varphi'(\Delta^m)$. $E_1^0 - \{p\}$ ist auf $\text{Rd } E_1^0$ zusammenziehbar, (dabei bleibt L^c als Teilmenge von M^c ungeändert), deswegen gibt es ein $(\Delta^m, \varphi'', \varphi''(\Delta^m)) \in \overline{\mathfrak{S}}$ mit $\varphi''(\Delta^m) \cap E_1^0 = \emptyset$. Da $\varphi'(\Delta^m)$ mit nur endlich vielen E_1^0 einen nichtleeren Durchschnitt hat, können wir nach endlich vielen Schritten obiger Form ein Element aus $\overline{\mathfrak{S}}$ finden, das die gewünschte Eigenschaft β) hat. Mit φ_* , $\varphi'_* = h_1 \circ \varphi_*$ und Δ_*^m anstelle von φ , φ' und Δ^m können wir analog schließen. Wir erhalten

Theorem 3: Sei $\mathfrak{S} = (\Delta^m, \varphi, \varphi(\Delta^m))$ bzw. φ_* ein Element von A bzw. B mit $A \in H_m(M)$ bzw. $B \in \Pi_m(M)$. Dann können wir die Elemente $\mathfrak{S}' \in A$ und $\varphi'_* \in B$ so wählen, daß für $\mathfrak{S}'$ mit $\mathfrak{S}' = (\Delta^m, \varphi', \varphi'(\Delta^m))$ und φ'_* gilt:

α) $\varphi'(\Delta^m) \subset (L)^m$ und $\varphi'_*(\Delta_*^m) \subset (L)^m$, dabei sei $(L)^m$ das m -dimensionale Gerüst von L ,

β) $\varphi'(\Delta^m)$ bzw. $\varphi'_*(\Delta_*^m)$ ist die Vereinigung endlich vieler Teilmengen $\overline{E_1^0}$ aus $(L)^m$.

-L-I-T-E-R-A-T-U-R-

- [1] Andreotti-Frankel: The Lefschetz theorem on hyperplane sections. Annals of Math. 69 (1959), S. 713-717
- [2] Bott, R.: Morse Theory and its Application to Homotopy Theory. Math. Inst. d. Univ. Bonn 1960
- [3] Colloquium über Kählersche Mannigfaltigkeiten.
Math. Inst. d. Univ. Göttingen 1960-61
- [4] Constantinescu-Cornea: Ideale Ränder Riemannscher Flächen. Ergebnisse d. Math. und ihrer Grenzgebiete 1963
- [5] Eilenberg-Steenrod: Foundations of algebraic Topology.
Princeton Univ. Press 1952
- [6] Grauert, H.: Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. Math. Annalen 146 (1962),
S. 331-368
- [7] Gunning-Rossi: Analytic functions of several complex variables. Prentice Hall 1965
- [8] Hicks, N.: Notes on Differential Geometry.
D. van Nostrand Company Inc., Princeton 1965
- [9] Kampke, E.: Gewöhnliche Differentialgleichungen
Leipzig 1944
- [10] Klingenberg, W.: Riemannsche Geometrie im Großen.
Math. Inst. d. Univ. Bonn 1962

- [11] Milnor: Morse Theory. Annals of Math. Studies 51,
Princeton 1963
- [12] Montel, P.: Sur l'integrale superieure et l'integrale
inferieure d'une equation differentielle. Bull. des
Sciences Math., Ser. 2, 50 (1926), S. 205-217
- [13] Morse: The existence of polar non-degenerate functions
on differentiable manifolds. Ann. of Math. 71 (1960)
S. 352 - 383
- [14] Steenrod, N.: The Topology of Fibre Bundles.
Princeton Univ. Press 1951
- [15] Whitehead, J.H.C.: Combinatorial Homotopy I.
Bull. of the Amer. Math. Soc. 55 (1949), S. 213-245

Lebenslauf

-.--.-.-.-.-

Ich, Gudrun Kalmbach, wurde am 27. Mai 1937 als viertes Kind des Hauptlehrers Hans Kalmbach und seiner Ehefrau Elise, geb. Wizemann, in Großerlach geboren. Mein Vater fiel im Krieg, meine Mutter starb 1946. Eine zweite Heimat fand ich bei dem ältesten Bruder meines Vaters, Friedrich Kalmbach, in Hallwangen. - Im Herbst 1951 trat ich in die Lehrerinnenoberschule in Schwenningen ein, an der ich 1956 das Abitur ablegte. Im Sommersemester 1956 fing ich an der Universität Tübingen an, Chemie und Biologie zu studieren. 1958 wechselte ich mein Studienfach und die Universität; ich begann an der Universität Göttingen mein Mathematikstudium. 1961 wurde ich in die Studienstiftung des Deutschen Volkes aufgenommen. Die erste Staatsprüfung für das Lehramt an Höheren Schulen bestand ich im Sommer 1963.

Herrn Professor Grauert verdanke ich die Anregung zu der vorliegenden Arbeit. Für die stete Förderung, die Herr Professor Grauert mir zuteil werden ließ, bin ich ihm sehr zu Dank verpflichtet.

